

## ARREGLO DE FUENTES PUNTUALES, PARTE I

Este capítulo incluye los siguientes tópicos:

- Ejemplo de arreglo de dos fuentes puntuales.
- Multiplicación de patrón.
- Síntesis de patrón.
- Fuentes no isotrópicas.
- Arreglo lineal de "n" fuentes puntuales.
- Arreglos de radiación transversal y longitudinal.
- Angulo en la dirección de los nulos y los puntos de media potencia.

### 5-1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 una antena fue tratada como una apertura. En el capítulo 4 una antena fue considerada como una única fuente puntual. En este capítulo nosotros continuamos con el concepto de fuente puntual, pero lo extendemos a una consideración de arreglo de fuentes puntuales. Esta metodología es de gran valor debido a que el patrón de cualquier antena puede ser visto como producido por el arreglo de fuentes puntuales. Gran parte de esta discusión concernirá arreglos de fuentes puntuales isotrópicas las cuales pueden representar diferentes tipos de antenas.

Con la información de este capítulo y los programas de computadoras disponibles, los estudiantes estarán aptos de diseñar arreglos que produzcan la mayoría de patrones deseados.

### 5-2 ARREGLOS DE DOS FUENTES ISOTRÓPICAS PUNTUALES

Introduzcamos el tema de arreglo de fuentes puntuales para la consideración de la situación más simple, particularmente, de dos fuentes isotrópicas puntuales. Como ilustraciones, cinco casos que involucran fuentes puntuales isotrópicas son discutidos.

#### CASO 1. DOS FUENTES PUNTUALES ISOTRÓPICAS DE LA MISMA AMPLITUD Y FASE

El primer caso que analizaremos es el de dos fuentes puntuales isotrópicas que tienen igual amplitud y oscilan en la misma fase. Dejando las dos fuentes puntuales, 1 y 2, estar separadas por una distancia "d" y localizados simétricamente con respecto al origen de las coordenadas como se muestra en la figura 5-1a. El ángulo " $\varphi$ " es medido en sentido antihorario desde el eje "X" positivo. El origen de coordenadas es tomado como referencia para la fase. Entonces a una distancia del punto en la dirección " $\varphi$ " el campo de la fuente 1 es retardado por  $(1/2)d_r \cos(\varphi)$ , mientras el campo de la fuente 2 esta adelantado por  $(1/2)d_r \cos(\varphi)$ , donde "d", es la distancia entre las fuentes expresadas en radianes; esto es:

$$d_r = \frac{2\pi d}{\lambda} = \beta d$$

El campo total a una distancia r en la dirección " $\varphi$ " es entonces

$$E = E_0 e^{-j\psi/2} + E_0 e^{+j\psi/2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

Donde  $\psi = d_r \cos\varphi$  y la amplitud de las componentes del campo a la distancia r están dadas por  $E_0$ .

El primer término en (1) es la componente del campo debido a la fuente 1 y el segundo término es la componente debido a la fuente 2. Ecuación (1) también puede ser escrita de la siguiente manera

$$E = 2E_0 \frac{e^{+j\psi/2} + e^{-j\psi/2}}{2} \quad \dots\dots\dots(2)$$

la cual por una identidad trigonométrica es

$$E = 2E_0 \cos \frac{\psi}{2} = 2E_0 \cos \left( \frac{d_r}{2} \cos \varphi \right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

Este resultado puede también ser obtenido con la ayuda del diagrama vectorial mostrado en la figura 5-1b, del cual la ecuación (3) continúa directamente. Nosotros notamos en la Fig. 5-1b que la fase del

campo total E no cambia como una función de "ψ". Para normalizar (3), en otras palabras, tomar su máxima unidad de valor, y poner 2E<sub>0</sub>=1. Suponer además que d es λ/2. Entonces d<sub>r</sub>=π. Incluyendo estas condiciones en (3) nos resulta

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right) \dots\dots\dots (4)$$

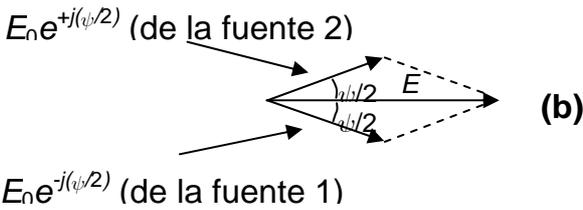
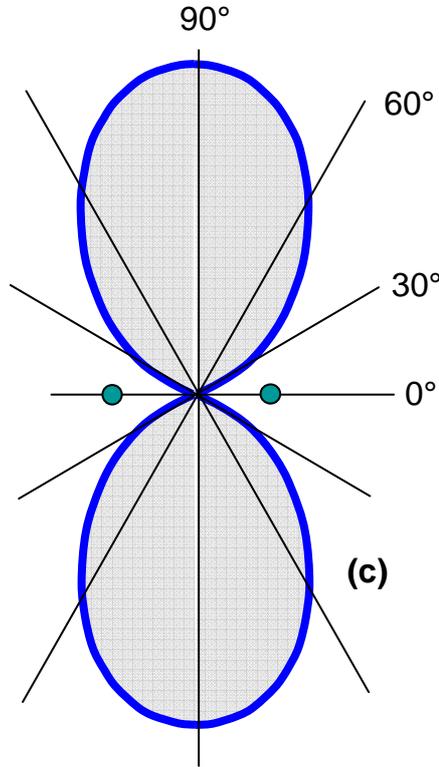
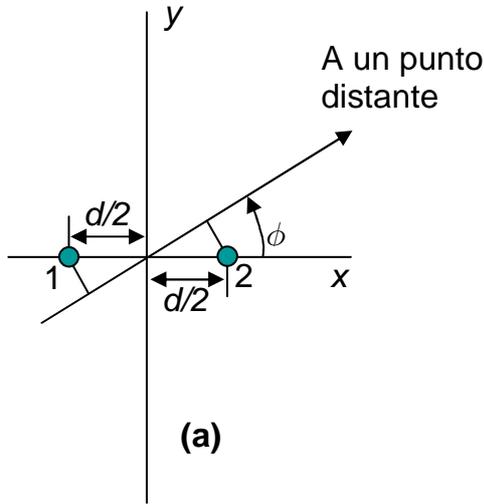


Figura 5-1

- (a) Relación en el arreglo coordinado de dos fuentes puntuales isotrópicas separadas por una distancia "d".
- (b) Vector adición de los campos de dos fuentes puntuales isotrópicas de igual magnitud y misma fase localizadas como en (a).
- (c) Patrón de campo de dos fuentes puntuales isotrópicas de igual magnitud y misma fase localizadas como en (a) para el caso donde la separación es d=λ/2.

El patrón de campo de E versus "φ" como esta expresado en (4) es presentado en Fig. 5-1c. El patrón es una figura bidireccional en forma de ocho con longitud máxima sobre el eje Y. El patrón de espacio tiene forma de roquilla, resultando de la revolución de la figura de este patrón alrededor de la abscisa X. El mismo patrón puede ser obtenido a través de la localización de la fuente 1 en el origen de coordenadas y la fuente 2 a una distancia "d" a lo largo de la abscisa X como esta indicado en la Fig. 5-2a. Tomando ahora el campo de la fuente 1 como referencia, el campo de la fuente 2 en la dirección "φ" esta adelantado por d<sub>r</sub>cos(φ). De esta manera, el campo total E a una gran distancia "r" es el vector suma de los campos de las dos fuentes son dadas por

$$E = E_0 + E_0 e^{+j\psi} \dots\dots\dots (5)$$

donde  $\psi = d_r \cos(\varphi)$

La relación de estos campos es indicada por el diagrama vectorial de la Fig. 5-2b. Del diagrama vectorial la magnitud del campo total es

$$E = 2E_0 \cos \frac{\psi}{2} = 2E_0 \cos \frac{d_r \cos \phi}{2} \dots\dots\dots(6)$$

como se obtuvo en el resultado anterior (3). La fase del campo total, sin embargo, no es constante en este caso pero es  $\psi/2$ , como también es mostrado al reescribir la ecuación (5) de la forma

$$E = E_0(1 + e^{j\psi}) = 2E_0 e^{j\psi/2} \left( \frac{e^{j\psi/2} + e^{-j\psi/2}}{2} \right) = 2E_0 e^{j\psi/2} \cos \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(7)$$

Normalizando al poner  $2E_0=1$ , (7) se obtiene lo siguiente

$$E = e^{j\psi/2} \cos \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\psi}{2} \angle \psi/2 \dots\dots\dots(8)$$

En (8) el factor coseno nos da la variación de amplitud de E, y la exponencial o factor de ángulo, nos da la variación de fase con respecto a la fuente 1 como la referencia. La variación en fase para el caso de  $\lambda/2$  separado ( $d_r=\pi$ ) es mostrado por la línea punteada en la Fig. 5-2c. Aquí el ángulo de fase con respecto a la fase de la fuente 1 esta dada por  $\psi/2=(\pi/2)\cos\phi$ . La variación de magnitud para este caso ya ha sido presentada en la Fig. 5-1c. Cuando la fase es referida al punto medio entre las fuentes (Fig. 5-1a), no hay ningún cambio de fase alrededor del arreglo como es mostrador por la línea sólida en Fig. 5-2c. De esa manera, un observador a una distancia fija no observa ningún cambio en la fase cuando un arreglo es rotado (con respecto a  $\phi$ ) alrededor de su punto medio, pero un cambio (la curva punteada en la Fig. 5-2c) es observado si el arreglo es rotado con la fuente 1 como centro de rotación.

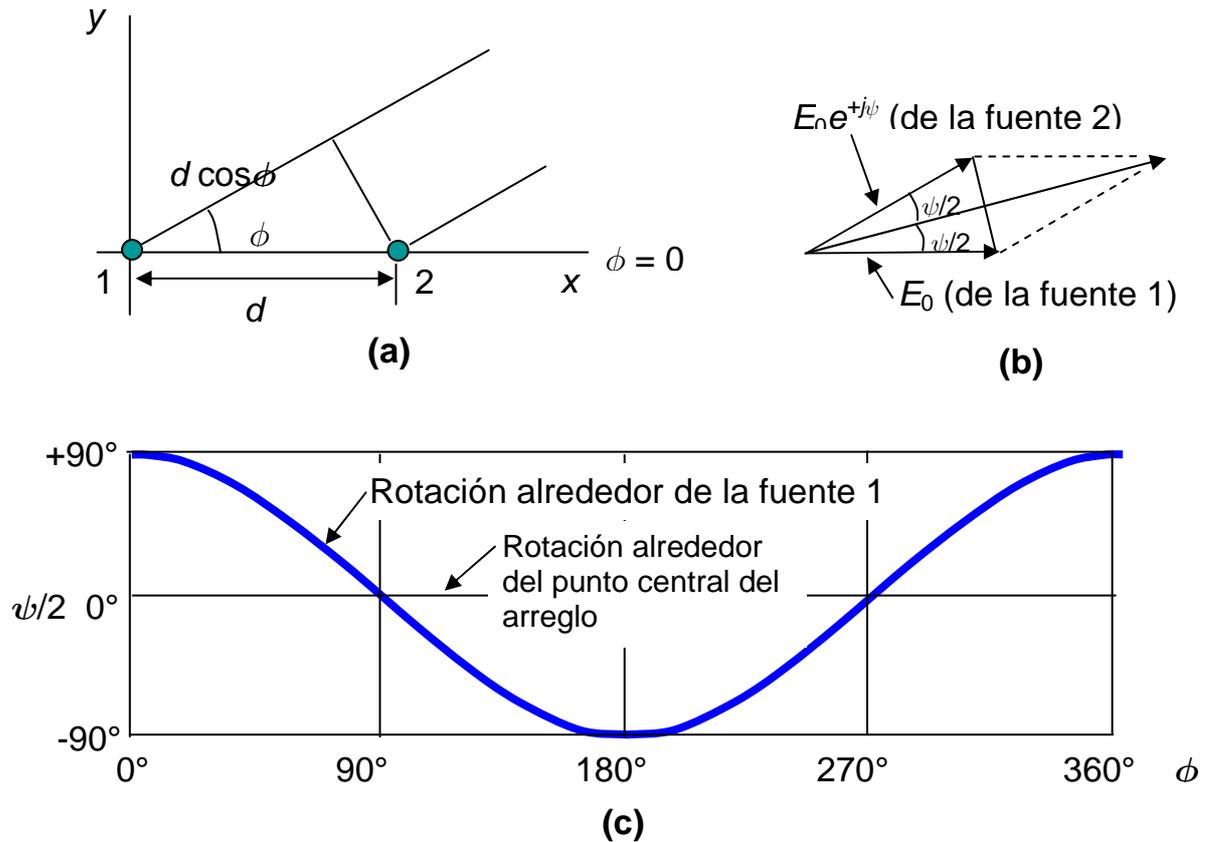


Figura 5-2

- (a) Dos fuentes puntuales isotrópicas con el origen del arreglo coordinado coincidente con una de las fuentes.
- (b) Vector adición de campo de dos fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y misma fase localizadas como en (a).

- (c) Fase del campo total como una función de  $\varphi$  para dos fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud y fase separadas por  $\lambda/2$ . El cambio de fase es cero cuando se refiere al punto central del arreglo pero es  $\psi/2$  como es mostrado por la curva punteada cuando es referido a la fuente 1.

## CASO 2. DOS FUENTES PUNTUALES ISOTRÓPICAS DE IGUAL MAGNITUD PERO FASE OPUESTA

Este caso es idéntico con el primero que hemos considerado excepto que las dos fuentes están en fase opuesta en lugar de la misma fase. Como al dejar las fuentes como en la Fig. 5-1a. Entonces el campo total en la dirección " $\varphi$ " a una distancia  $r$  grande esta dado por

$$E = E_0 e^{+j\psi/2} - E_0 e^{-j\psi/2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

de la cual se obtiene

$$E = 2jE_0 \text{sen} \frac{\psi}{2} = 2jE_0 \text{sen} \left( \frac{d_r}{2} \cos \varphi \right) \quad \dots\dots\dots(10)$$

Mientras que el Caso 1 (ecuación 3) involucra el coseno de  $\psi/2$ , la ecuación (10) para el Caso 2 involucra el seno. La ecuación (10) también incluye un operador "j", indicando que la fase inversa de una de las fuentes, en el Caso 2 resulta en un desfase de  $90^\circ$  del campo total cuando es comparado con el campo total para el Caso 1. Esto no es muy importante aquí. De esta modo, poniendo  $2jE_0=1$  y considerando el caso especial de  $d=\lambda/2$ , la ecuación (10) llega a ser

$$E = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) \quad \dots\dots\dots(11)$$

Las direcciones máximas de campo  $\varphi_m$  son obtenidas al poner el argumento de la ecuación (11) igual a  $\pm(2k+1)\pi/2$ . De esta manera

$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi_m = \pm(2k+1) \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots(11a)$$

donde  $k=0, 1, 2, 3\dots$  Para  $k=0$ ,  $\cos \varphi_m = \pm 1$  y  $\varphi_m = 0^\circ$  y  $180^\circ$ .

Las direcciones de nulos  $\varphi_0$  son dadas por

$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi_0 = \pm k\pi \quad \dots\dots\dots(11b)$$

Para  $k=0$ ,  $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ .

Las direcciones de media potencia están dadas por

$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi = \pm(2k+1) \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\dots(11c)$$

Para  $k=0$ ,  $(\varphi) = \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$ .

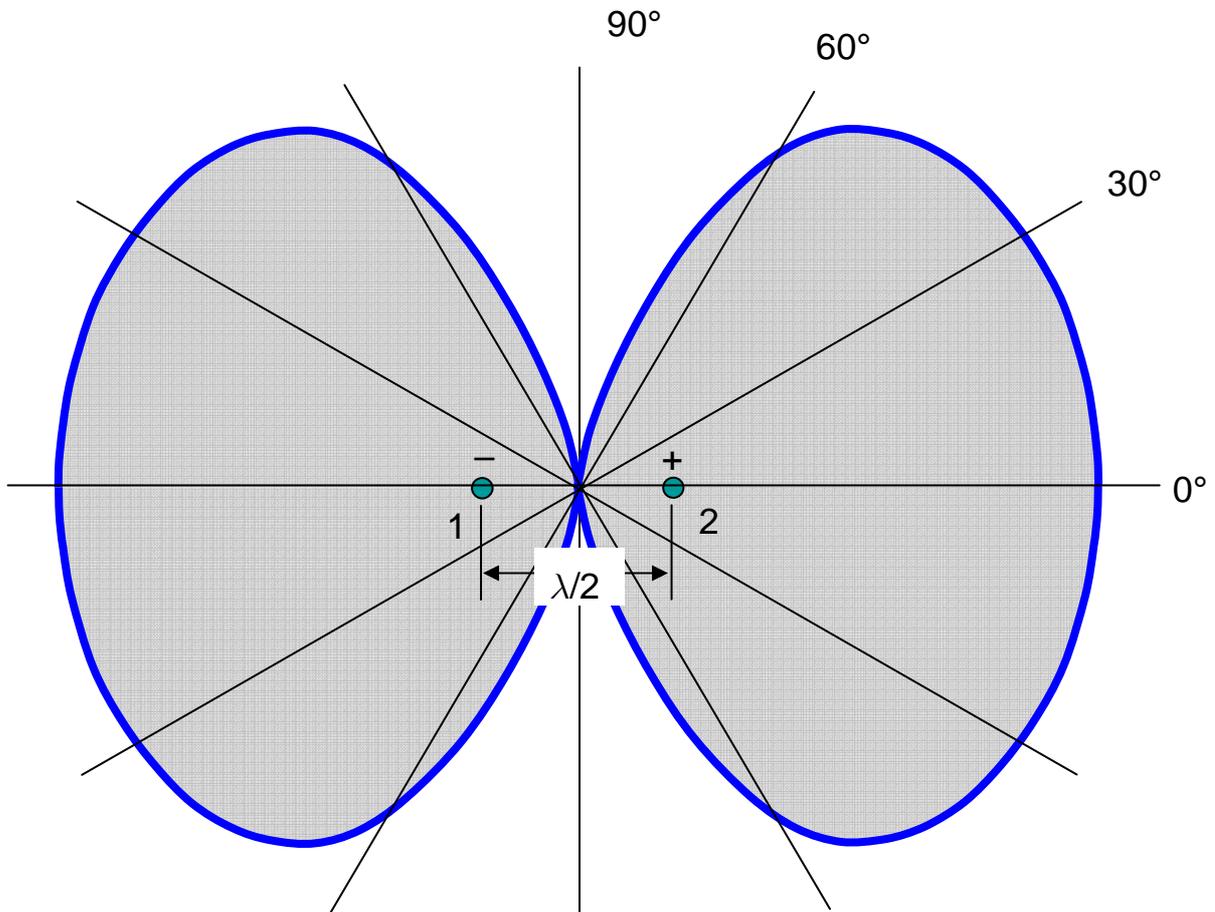
El patrón de campo dado por (11) es mostrado en la Fig. 5-3. El patrón es una figura relativamente ancha en forma de ocho con el campo máximo en la misma dirección de la línea que une las fuentes

(abscisa X). El patrón de espacio es una figura de revolución de su patrón alrededor del eje X. Las dos fuentes, en este caso pueden ser descritas como un tipo simple de arreglo longitudinal de radiación. En contraste a este patrón, las fuentes puntuales "en fase" producen un patrón con el campo máximo normal a la línea que une las fuentes, como se muestra en la Fig. 5-1c. Las dos fuentes para este caso pueden ser descrita como un simple arreglo de radiación transversal.

**CASO 3. DOS FUENTES ISOTRÓPICAS PUNTUALES DE LA MISMA AMPLITUD Y EN FASE CUADRATURA**

Localizando las dos fuentes puntuales como la Fig. 5-1a. Tomando el origen de coordenadas como la referencia para la fase, la fuente 1 es retardada por 45° y la fuente 2 es adelantada 45°. Entonces el campo total en la dirección φ a una distancia grande resta dada por

$$E = E_0 \exp\left[+j\left(\frac{d_r \cos \varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + E_0 \exp\left[-j\left(\frac{d_r \cos \varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \dots\dots\dots(12)$$



**Figura 5-3**

Patrón de campo relativo para dos fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud pero fase opuesta, separadas λ/2.

De (12) obtenemos

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{d_r}{2} \cos \varphi\right) \dots\dots\dots(13)$$

Haciendo 2E<sub>0</sub>=1 y d=λ/2 se llega a tener

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cos \varphi\right) \dots\dots\dots(14)$$

El patrón de campo dado por (14) es presentado en Fig. 5-4. El patrón de espacio es una figura de revolución de su patrón alrededor del eje X. La mayor parte de la radiación esta en el segundo y tercer cuadrantes. Es interesante notar que el campo en la dirección  $\varphi=0^\circ$  es el mismo que el de la dirección  $\varphi=180^\circ$ . Las máximas direcciones de campo  $\varphi_m$  son obtenidas al poner el argumento de (14) igual a  $k\pi$ , donde  $k\pi=0, 1, 2,3,\dots$ . De esta manera obtenemos

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cos \varphi_m = k\pi \dots\dots\dots(15)$$

Para  $k=0$

$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi_m = -\frac{\pi}{4} \dots\dots\dots(16)$$

y

$$\varphi_m = 120^\circ \text{ y } 240^\circ \dots\dots\dots(17)$$

Si el espaciamiento entre las fuentes es reducido a  $\lambda/4$ , (13) se convierte en

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \varphi\right) \dots\dots\dots(18)$$

El patrón de campo para este caso es ilustrado por Fig. 5-5a. Este tiene la forma de una cardioide, de patrón unidireccional con máximo campo en la dirección negativa del eje X. El patrón de espacio es una figura de revolución de su patrón alrededor del eje X.

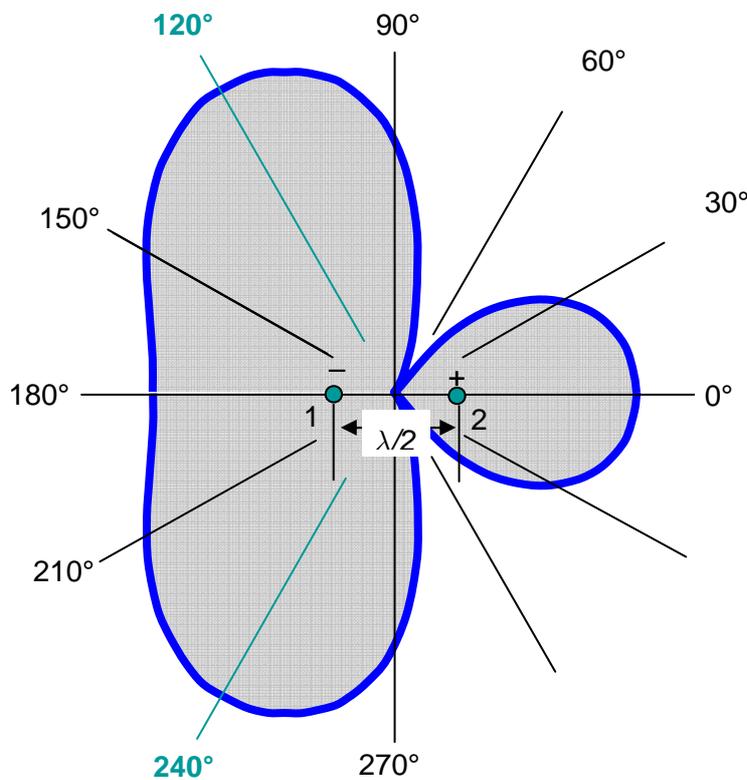


Figura 5-4

Patrón de campo relativo para dos fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud y fase en cuadratura para una separación de  $\lambda/2$ . La fuente hacia la derecha adelanta a la de la izquierda por  $90^\circ$ .

Un método simple para determinar la dirección máxima del campo es ilustrado en la Fig. 5-5b. Como se puede apreciar indicada por vectores, la fase de la fuente 2 es  $0^\circ$  (vector a la derecha) y la fase de la fuente 1 es  $270^\circ$  (vector hacia abajo). De esta manera, la fuente 2 adelanta a la fuente 1 en un desfase de  $90^\circ$ .

Para encontrar el campo radiado a la izquierda, imagine que partimos de la fuente 2 (fase  $0^\circ$ ) y nos dirigimos a la izquierda, viajando con la onda (fase  $0^\circ$ ) como surfer "corriendo olas". La fase de la onda con la que estamos viajando es  $0^\circ$  y no cambia pero para el momento en que hemos viajado  $\lambda/4$  y arribado a la fuente 1, un  $1/4$  de periodo habrá transcurrido, por eso la corriente en la fuente 1 habrá avanzado  $90^\circ$  (vector rotado ccW) de  $270^\circ$  a  $0^\circ$ , poniéndose en la misma fase que la onda con la que estamos viajando. Como al centro del diagrama en la Fig. 5-2b. De esta manera, el campo de la onda de la fuente 2 refuerza al de la fuente 1, y los dos campos viajan a la izquierda juntos en fase produciendo un campo máximo a la izquierda el cual es dos veces el campo de cualquiera de las fuentes sola.

Ahora imagine que partimos de la fuente 1 con fase  $270^\circ$  (vector hacia abajo) y viajamos a la derecha. Para el momento en que arribemos a la fuente 2 su campo habrá avanzado de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  por eso esta se encuentra en fase opuesta y cancela el campo de la onda con la que estamos viajando, como en el diagrama de la Fig. 5-5b, resultando en radiación cero a la derecha.

**CASO 4. CASO GENERAL DE DOS FUENTES ISOTRÓPICAS PUNTUALES DE IGUAL MAGNITUD Y CUALQUIER DESFAJAJE**

Procediendo ahora con una situación más general, consideremos el caso de dos fuentes isotrópicas puntuales de igual amplitud pero de diferente fase  $\phi$ . La diferencia total en fase " $\psi$ " entre los campos de las fuentes uno y dos a un punto de distancia en la dirección " $\phi$ " (ver Fig. 5-2a) es entonces

$$\psi = d_r \cos \phi + \delta \dots\dots\dots(19)$$

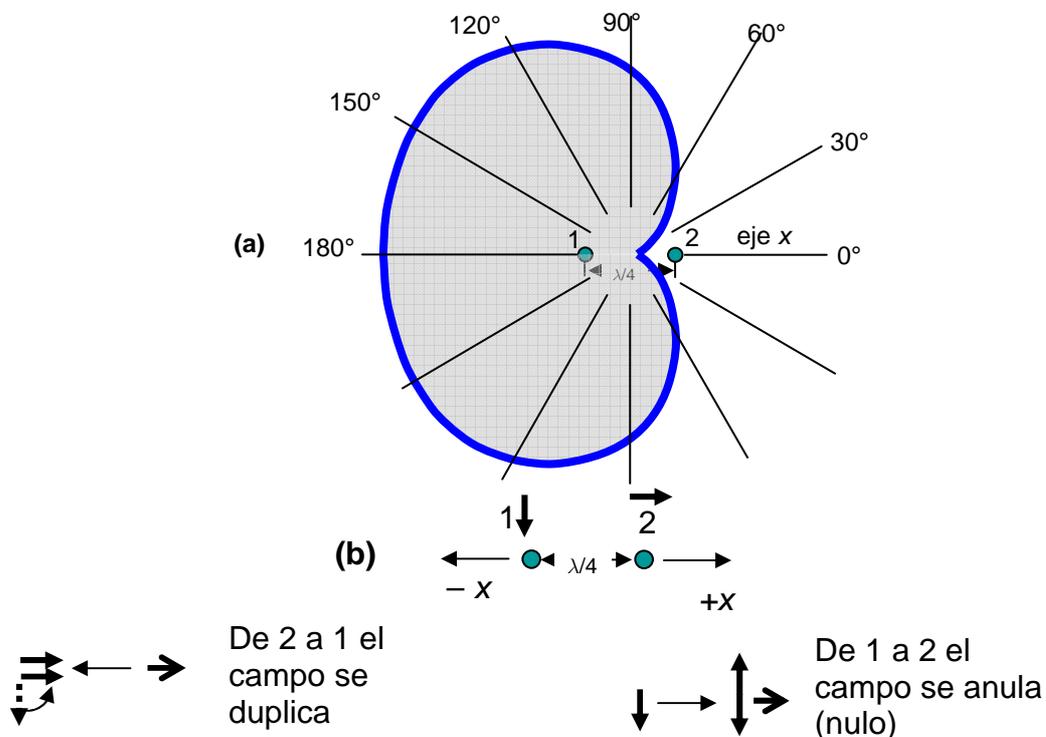


Figura 5-5

- (a) Patrón de campo relativo de dos fuentes isotrópicas de la misma amplitud y en fase cuadratura para una separación de  $\lambda/4$ . La fuente 2 adelanta a la fuente 1 por  $90^\circ$ .
- (b) Diagramas de vectores ilustrando el reforzamiento de los campos en la dirección  $-X$  y cancelación de campo en la dirección  $+X$ .

Tomando la fuente 1 como referencia para la fase, el signo positivo en (9), indica que la fuente 2 esta adelantada en fase por un ángulo  $\phi$ . Un signo menos sería usado para indicar un retardo de fase. Si es que, en ves de referirse a la fase de la fuente 1, esta se refiere al punto central del arreglo, la fase del campo de la fuente 1 a un punto de distancia, esta dado por  $-\psi/2$  y el de la fuente 2 por  $+\psi/2$ . El campo total es entonces

$$E = E_0(e^{+j\psi/2} + e^{-j\psi/2}) = 2E_0 \cos \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(20)$$

normalizando la EC. (20) tenemos la expresión general para el patrón de campo de dos fuentes isotrópicas de igual amplitud y fase arbitraria,

$$E = \cos \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(21)$$

donde  $\psi$  esta dado por (19). Los tres casos que hemos discutido son evidentemente casos especiales de (21). De esta manera, los casos 1,2 y 3 son obtenidos de (21) cuando " $\delta$ " es  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $90^\circ$  respectivamente.

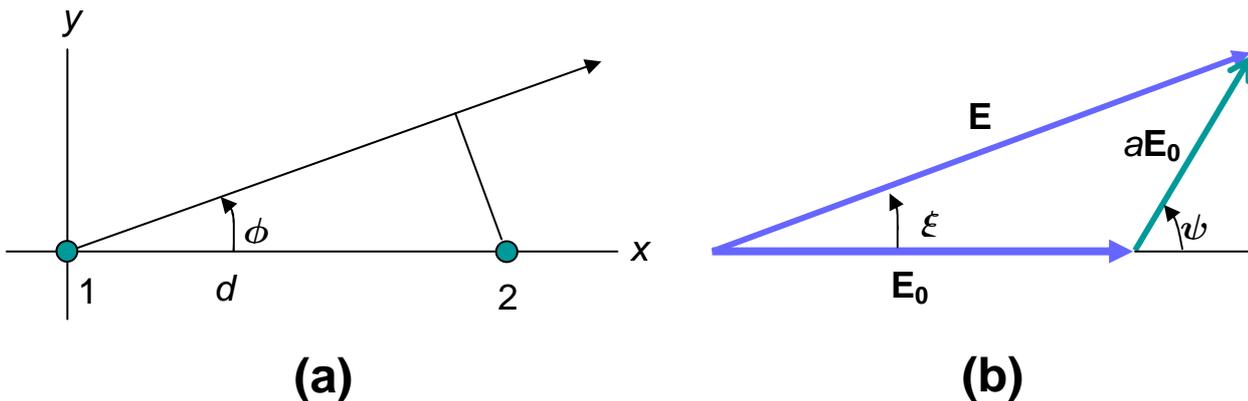


Figura 5-6

- (a) Dos fuentes puntuales isotrópicas de diferente amplitud y fase arbitraria con respecto del arreglo de coordenadas.
- (b) Vector suma de los campos dispuestos como en (a). La amplitud de la fuente 2 se asume que es más pequeña que la de la fuente 1 por un factor "a".

**CASO 5. CASO MAS GENERAL DE DOS FUENTES PUNTUALES ISOTRÓPICAS DE DIFERENTE AMPLITUD Y CUALQUIER DIFERENCIA DE FASE**

Una situación mucho más general, involucra dos fuentes puntuales, existe cuando las amplitudes son diferentes y la diferencia de fase arbitraria. Con las fuentes situadas como en la figura 5-6a con la fuente 1 en el origen. Se asume que la fuente 1 tiene una amplitud mayor respecto a la fuente 2 y que su campo a una gran distancia r tiene una amplitud de  $E_0$ . Dejando el campo de la fuente 2 a un valor de amplitud  $aE_0$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) a la distancia de r. Entonces refiriéndonos a la figura 5-6b, la magnitud y ángulo de fase del campo total E esta dado por

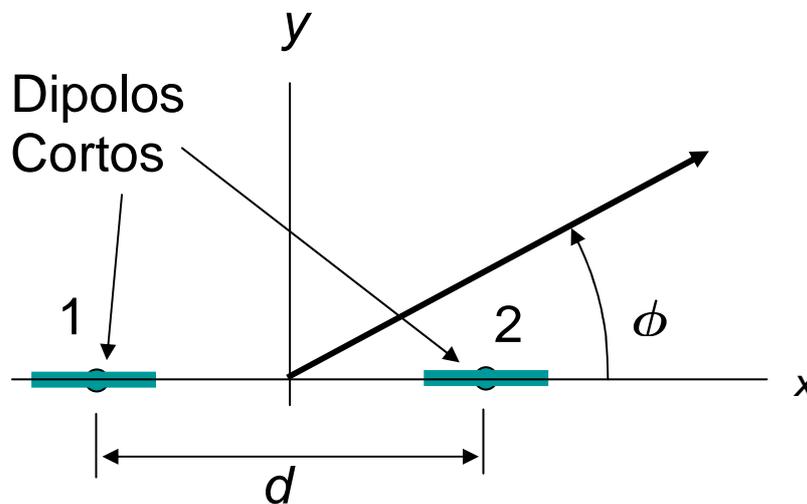
$$E = E_0 \sqrt{(1 + a \cos \psi)^2 + a^2 \sin^2 \psi} \angle \arctan [a \sin \psi / (1 + a \cos \psi)] \dots\dots\dots(22)$$

donde  $\psi = d \cdot \cos \phi + \delta$  y el ángulo de fase ( $\angle$ ) es referido a la fuente 1. Este es el ángulo de fase " $\xi$ " mostrado en la Fig. 5-6b.

### 5-3 FUENTES PUNTALES NO ISOTRÓPICAS Y EL PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN DE PATRONES

Todos los casos considerados en la sección precedente involucran fuentes puntuales isotrópicas. Estos pueden ser fácilmente extendidos a una situación más general en la cual las fuentes son no isotrópicas pero similares. La palabra similar es aquí usada para indicar que la variación con el ángulo absoluto " $\phi$ " de ambos, amplitud y fase, del campo es la misma. Las amplitudes máximas de las fuentes individuales pueden ser diferentes. Si, sin embargo, son también iguales, las fuentes no son solamente similares sino que son idénticas. Como un ejemplo, reconsideremos el Caso 4 de la sección 5-2 en la cual las fuentes son idénticas, con la modificación que ambas fuentes 1 y 2 tienen patrones de campo dados por

$$E = E_0' \sin \phi \dots\dots\dots(1)$$



**Figura 5-7**

Dos fuentes no isotrópicas con respecto al arreglo de coordenadas.

Patrones de este tipo deben ser producidos por dipolos cortos orientados de manera paralela respecto a eje X como se sugirió en la Fig. 5-7. Sustituyendo (1) en (5-2-20) y normalizando al poner  $2E_0' = 1$ , nos resulta el campo patrón del arreglo como

$$E = \sin \phi \cos \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(2)$$

Donde  $\psi = d \cdot \cos \phi + \delta$

Esto resultado es el mismo como el obtenido al multiplicar el patrón de la fuente individual ( $\sin \phi$ ) por el patrón de dos fuentes isotrópicas puntuales ( $\cos \psi / 2$ ). Si las fuentes puntuales similares pero diferentes del Caso 5 (sección 5-2) tienen patrones como los dados por (1), el patrón total normalizado es

$$E = \sin \phi \sqrt{(1 + a \cos \psi)^2 + a^2 \sin^2 \psi} \dots\dots\dots(3)$$

aquí otra vez, el resultado es el mismo como el obtenido al multiplicar el patrón de la fuente individual por el patrón de un arreglo de fuentes puntuales isotrópicas. Estos ejemplos ilustran el principio de multiplicación de patrón, el cual puede ser expresado de la siguiente manera:

**“El patrón de campo de un arreglo de fuentes puntuales no isotrópicas pero similares es el producto del patrón de la fuente individual de un arreglo de fuentes puntuales isotrópicas tomando las mismas posiciones, amplitudes relativas, y fase como fuentes puntuales no isotrópicas”.**

Este principio puede ser aplicado a arreglos de cualquier número de fuentes proporcionada solamente que ellas son similares. La fuente individual no isotrópica o antena puede ser de medida finita pero puede ser considerada como una fuente puntual situada en el punto en la antena a la cual la fase es referida. Este punto es mencionado para ser el "centro de fase". La discusión anterior de la multiplicación de patrón ha sido relacionada solamente con el patrón de campo o magnitud del campo. Si el campo de la fuente no isotrópica y el arreglo de fuentes isotrópicas varían en fase con el ángulo espacial, i.e., que tiene un patrón de fase  $\angle$  cual no es una constante, la expresión del principio de multiplicación de patrón puede ser extendida para incluir este caso más general como sigue:

**“El patrón de campo total de un arreglo de fuentes no isotrópicas pero similares es el producto del patrón de fuente individual y un arreglo de fuentes puntuales isotrópicas cada una localizada al centro de la fase de la fuente individual y teniendo la misma amplitud relativa y fase, mientras el patrón de fase total es la suma de los patrones de fase de la fuente individual y el arreglo de fuentes puntuales isotrópicas”.**

El patrón de fase total es referido al centro de la fase del arreglo. En símbolos, el campo total  $E$  es entonces

$$E = \underbrace{f(\theta, \varphi)}_{\text{patrón de campo}} \angle \underbrace{f_p(\theta, \varphi)}_{\text{patrón de fase}} + F_p(\theta, \varphi) \dots\dots\dots(4)$$

Donde:

$f(\theta, \varphi)$  = Patrón de campo fuente individual

$f_p(\theta, \varphi)$  = Patrón de fase fuente individual

$F(\theta, \varphi)$  = Patrón de campo de arreglo fuentes isotrópicas

$F_p(\theta, \varphi)$  = Patrón de fase de arreglo fuentes isotrópicas

Los patrones son expresados en (4) como una función de ambos ángulos polares para indicar que el principio de la multiplicación de patrón se aplica a patrones de espacio como también a los casos bidimensionales que hemos estado considerando.

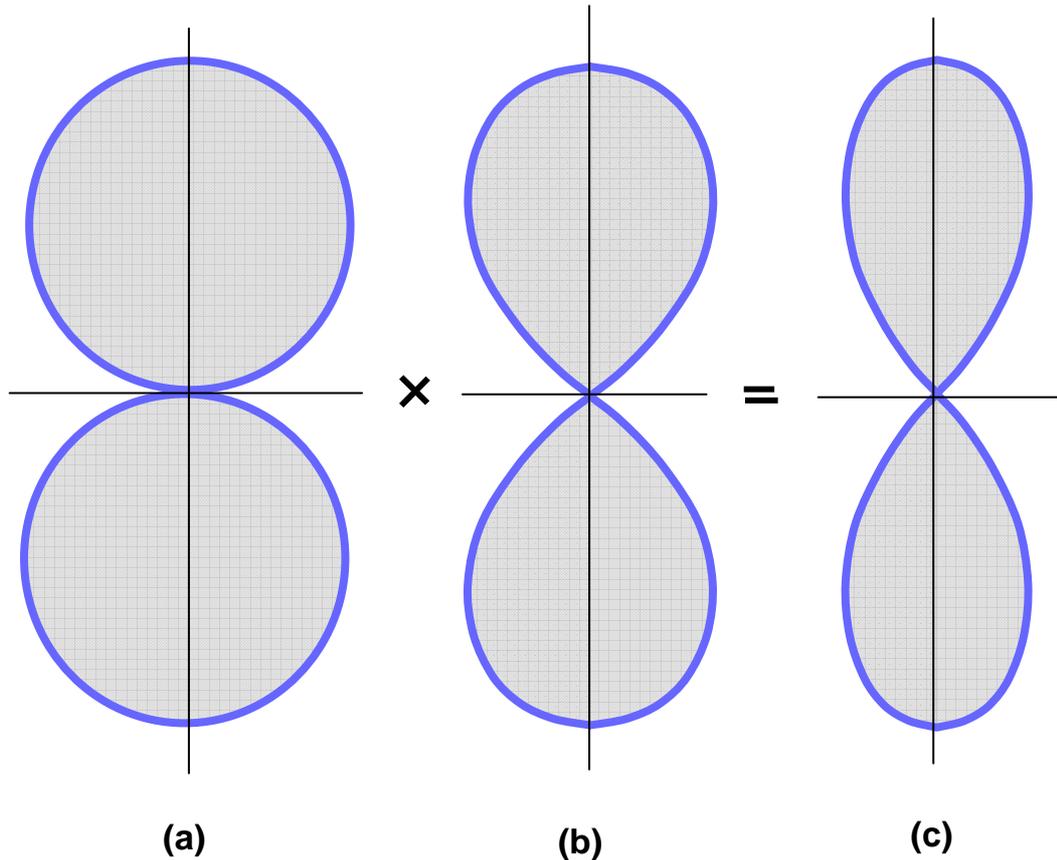
Para ilustrar el principio, aplicaremos dos modificaciones especiales del Caso 1 (sección 5-2).

### Ejemplo 5-3.1

Asumir dos fuentes puntuales idénticas separadas por una distancia "d", cada fuente tiene el patrón de campo dado por (1) como puede ser obtenido por dos dipolos cortos puestos como en la Fig. 5-7. Dejando a  $d=\lambda/2$  y el ángulo de fase  $\delta=0^\circ$ . Entonces el patrón de campo total es

$$E = \text{sen } \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right) \dots\dots\dots(5)$$

Este patrón es ilustrado por la Fig. 5-8c como el producto del patrón de la fuente individual ( $\text{sen } \varphi$ ) mostrado en (a) y el arreglo patrón  $\cos((\pi/2)\cos\varphi)$  como es mostrado en (b). El patrón es más agudo que el del Caso 1 (sección 5-2) para las fuentes isotrópicas. A esta distancia, el campo máximo de la fuente individual esta en la dirección  $\varphi=90^\circ$ , el cual coincide con la dirección del campo máximo para el arreglo de dos fuentes isotrópicas.



**Figura 5-8**

Ejemplo de multiplicación de patrón. Dos fuentes puntuales no isotrópicas pero idénticas de la misma amplitud y fase, espaciadas  $\lambda/2$  y dispuestas en la forma como en la Fig. 5-7, producen el patrón mostrado en (c). La fuente individual tiene el patrón mostrado en (a), el cual, cuando es multiplicado por el patrón de un arreglo de dos fuentes puntuales isotrópicas (de la misma amplitud y fase) como es mostrado en (b), produce el patrón total del arreglo de (c).

**EJEMPLO 5-3.2**

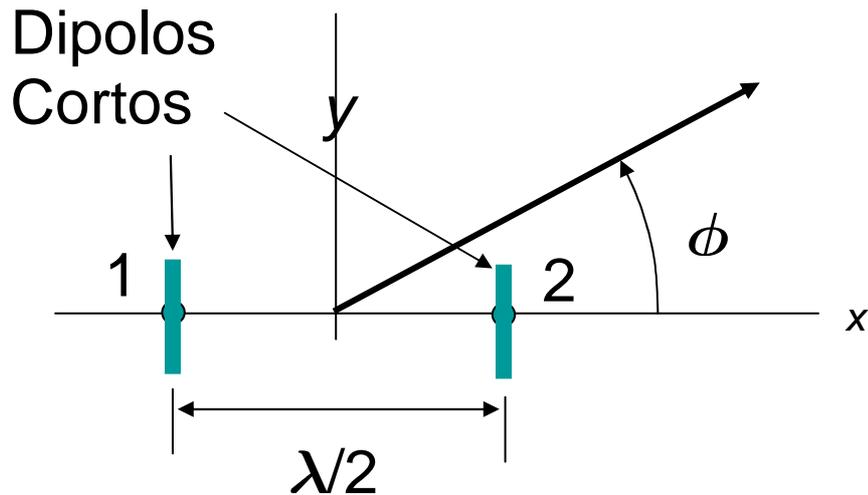
Consideremos la siguiente situación en la cual  $d=\lambda/2$  y  $\delta=0$  como en el Ejemplo 5-3.1 pero con patrones de fuente individual dados por

$$E = E_0' \cos \varphi \dots\dots\dots(6)$$

Este tipo de patrón puede ser producido por dipolos cortos orientados en forma paralela al eje Y como en la Fig. 5-9. aquí el campo máximo de la fuente individual esta en la dirección ( $\varphi=0^\circ$ ) de un nulo del arreglo, mientras la fuente individual tiene un nulo en la dirección ( $\varphi =90^\circ$ ) del máximo patrón del arreglo. Por el principio de multiplicación de patrón el campo normalizado total es

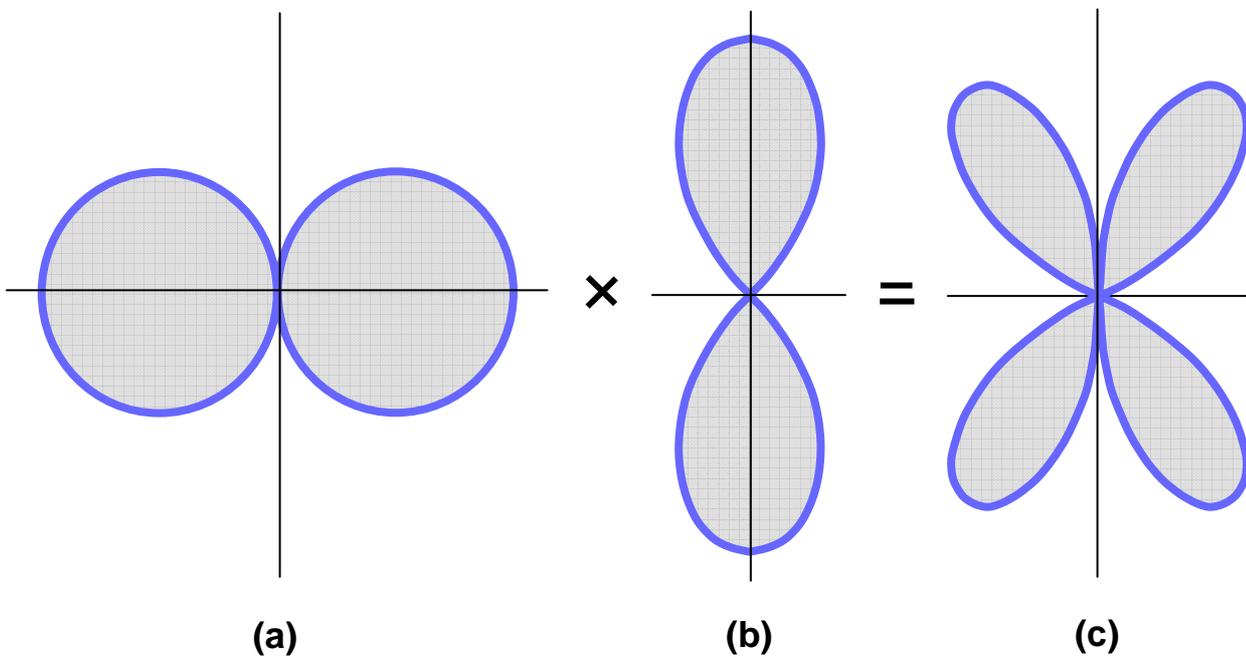
$$E = \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) \dots\dots\dots(7)$$

El patrón total del arreglo en el plano XY viene dado por (7) y esta ilustrado en Fig. 5-10c como el producto del patrón de fuente individual ( $\cos\varphi$ ) mostrado en (a) y el patrón del arreglo  $\cos(\pi/2\cos\varphi)$  mostrado en (b). El patrón total del arreglo en el plano XY tiene cuatro lóbulos con nulos en los ejes X e Y.



**Figure 5-9**

Arreglo de dos fuentes no isotrópicas con respecto al arreglo coordenado.



**Figure 5-10**

Ejemplo de multiplicación de patrón. Patrón total del arreglo (c) como el producto del patrón (a) de la fuente individual no isotrópica y el patrón (b) del arreglo dos fuentes isotrópicas. El patrón (b) para el arreglo de dos fuentes isotrópicas es idéntico con el de la Fig. 5-8b, pero el patrón de frente individual (a) esta rotado a  $90^\circ$  con respecto al patrón de la Fig. 5-8a.

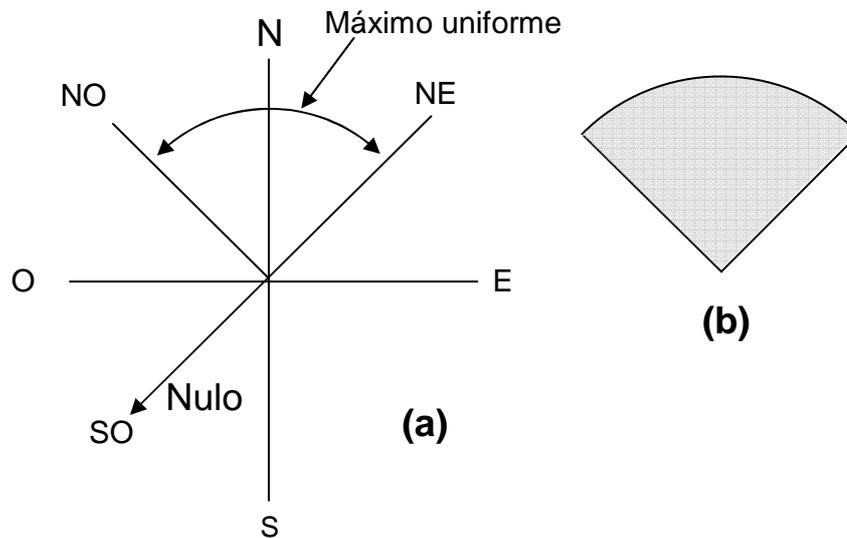
Los ejemplos anteriores ilustran dos aplicaciones del principio de multiplicación de patrón para arreglos en los cuales la fuente tiene un simple patrón. Sin embargo, en el caso mas general la fuente individual puede representar una antena de cualquier complejidad provisto que la amplitud y la fase de su campo pueden ser expresados como una función que depende de un ángulo; es decir, sí que el patrón de campo y el patrón de fase con respecto a la fase central son conocidas. Sí solamente el patrón de campo total es deseado, los patrones de fase no necesitan ser conocidos provisto que las fuentes individuales son idénticas. Si los arreglos en los ejemplos anteriores son parte de arreglos más grande, los arreglos más pequeños pueden ser estimados como fuentes puntuales no isotrópicas en el arreglo

más grande - otra aplicación del principio de multiplicación de patrón. De esta manera el principio de patrón de multiplicación puede ser aplicado "n" veces para encontrar los patrones de arreglos de arreglos de arreglos.

#### 5-4 EJEMPLO DE SÍNTESIS DE PATRÓN POR MULTIPLICACIÓN DE PATRONES

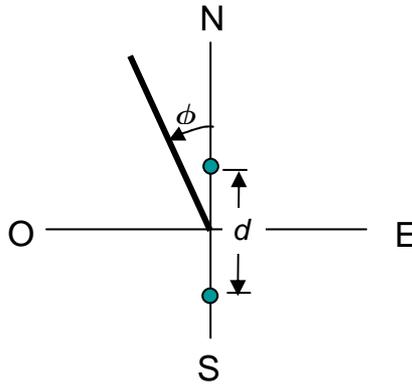
El principio de multiplicación de patrón, discutido en la sección anterior, es de gran ayuda en la síntesis de patrón. A través de la síntesis de patrón es entendido el proceso de búsqueda de la fuente o arreglo de fuentes que producen un patrón deseado. Teóricamente un arreglo de fuentes isotrópicas puntuales podría producir cualquier patrón arbitrario. Este proceso no siempre es simple y en algunos casos sea difícil o imposible de construir. Algo más simple, de menos elegante metodología para el problema de síntesis de antenas es la aplicación de multiplicación de patrones para combinaciones de arreglos prácticos, la combinación que mejor se aproxima al patrón deseado es el resultado de un proceso de "prueba y error".

Para ilustrar esta aplicación de multiplicación de patrón, consideremos el siguiente problema hipotético. Una estación emisora (en la banda de frecuencia de 500 a 1500 KHz.) requiere un patrón en el plano horizontal cumpliendo con las condiciones indicadas en la Fig. 5-11a. La intensidad máxima de campo, con una pequeña variación como sea posible, esta para ser radiada a  $90^\circ$  en el sector comprendido entre el noreste y noroeste. Ningún nulo en el patrón puede ocurrir en este sector. Sin embargo, los nulos pueden ocurrir en cualquier dirección en el sector complementario de  $270^\circ$ , pero, como un requerimiento adicional, los nulos deben estar presentes en la dirección este y la dirección suroeste para prevenir interferencias con otras estaciones en esas direcciones. Un patrón idealizado en el sector formado cumpliendo con aquellos requerimientos es ilustrado in la Fig. 5-11b. La antena produciendo este patrón consiste de un arreglo de cuatro torres verticales. Las corrientes en todas las torres serán iguales en magnitud, pero la fase puede ser ajustada para cualquier tipo de relación. No hay ninguna restricción en el espaciamiento o distribución de las torres.



**Figura 5-11**

- (a) Requerimientos para el patrón de una estación emisora.
- (b) Patrón idealizado cumpliendo con los requerimientos.



**Figura 5-12**

Distribución de dos fuentes puntuales isotrópicas para ambos arreglos primario y secundario.

Dado que nosotros estamos interesados solamente en el patrón horizontal plano, cada torre puede ser considerada como una fuente puntual isotrópica. El problema entonces llega a ser el de encontrar una relación de espacio y fase de cuatro fuentes puntuales isotrópicas localizadas en el plano horizontal la cual cumpla con los requerimientos antes mencionados.

El principio de multiplicación de patrón será aplicado a la solución de este problema a través de la búsqueda de patrones de dos pares de fuentes isotrópicas las cuales producen el patrón deseado al ser multiplicadas juntas. Primero encontremos un par de fuentes cuyos patrones cumplan los requerimientos de un amplio lóbulo de radiación con el máximo hacia el norte y un nulo al sur-oeste. Este será llamado el patrón primario.

Dos fuentes isotrópicas puestas en fase de un arreglo longitudinal puede producir un patrón con un lóbulo principal mas amplio que cuando este puesto en fase como un arreglo transversal (por ejemplo, compare la Fig. 5-1c y 5-5). Dado que un amplio lóbulo hacia el norte es deseado, un arreglo longitudinal de dos fuentes isotrópicas como es mostrado en la Fig. 5-12 será tratado. A partir de una consideración de formas de patrón como una función de separación y fase, un espaciamiento entre  $\lambda/4$  y  $3\lambda/8$  parece ser adecuada (ver Fig. 16-11). (Revisar Brown-I, Terman-I, y Smith-I). Como consecuencia, dejemos  $d=0.3\lambda$ . Entonces el patrón decampo para el arreglo es

$$E = \cos \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots(1)$$

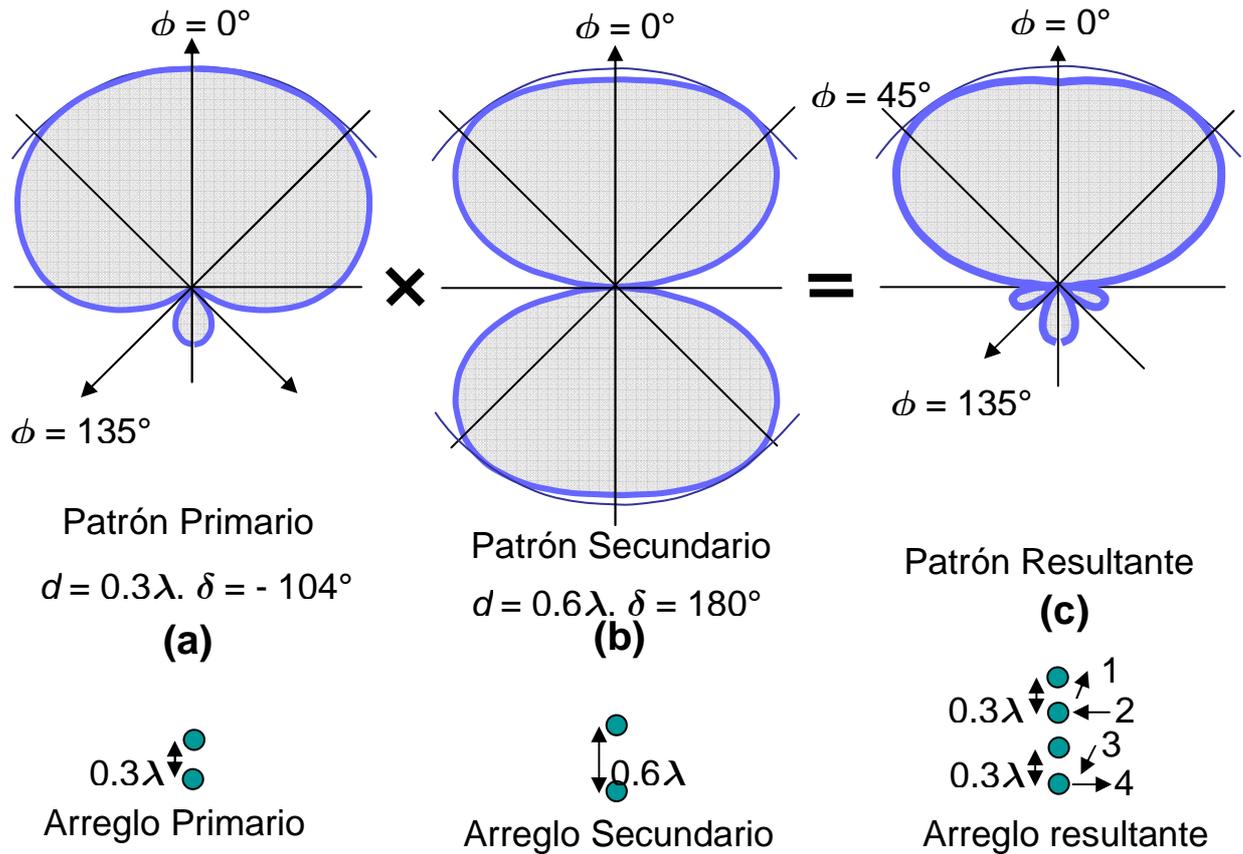
Donde

$$\psi = 0.6 \cos \phi + \delta \dots\dots\dots(2)$$

Para que halla un nulo en el patrón de (1) a  $\phi=135^\circ$ , es necesario que

$$\psi = (2k + 1)\pi \dots\dots\dots(3)$$

Donde  $k=0,1,2,3,\dots$



**Figura 5-13**

Patrones de campo de los arreglos primario y secundario de dos fuentes isotrópicas las cuales están multiplicadas juntas dando un patrón de un total de cuatro fuentes isotrópicas.

De la ecuación (2) y (3) entonces tenemos

$$-0.6\pi \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta = (2k + 1)\pi \dots\dots\dots(4)$$

o

$$\delta = (2k + 1)\pi + 0.425\pi \dots\dots\dots(5)$$

Para  $k=0, \delta=-104^\circ$ . El patrón para este caso ( $d=0,3\lambda$  y  $\delta =-104^\circ$ ) es ilustrado por Fig.5-13a. Luego busquemos un arreglo de dos fuentes isotrópicas puntuales que producirán un patrón de radiación que cumpla los requerimientos de un nulo a  $\phi=270^\circ$  y que también tenga un lóbulo amplio hacia el norte. Este será llamado como "Patrón Secundario". Este patrón multiplicado por el patrón del arreglo primario entonces producirá el patrón total del arreglo. Si las fuentes isotrópicas secundarias son ordenadas como en la Fig. 5-12 y tienen una diferencia de fase de  $180^\circ$ , entonces habrá un nulo a  $\phi=270^\circ$ . Damos el espaciamento  $d=0,6\lambda$ . Entonces el patrón secundario esta dado por (1) donde

$$\psi = 1.2\pi \cos \phi + \pi \dots\dots\dots(6)$$

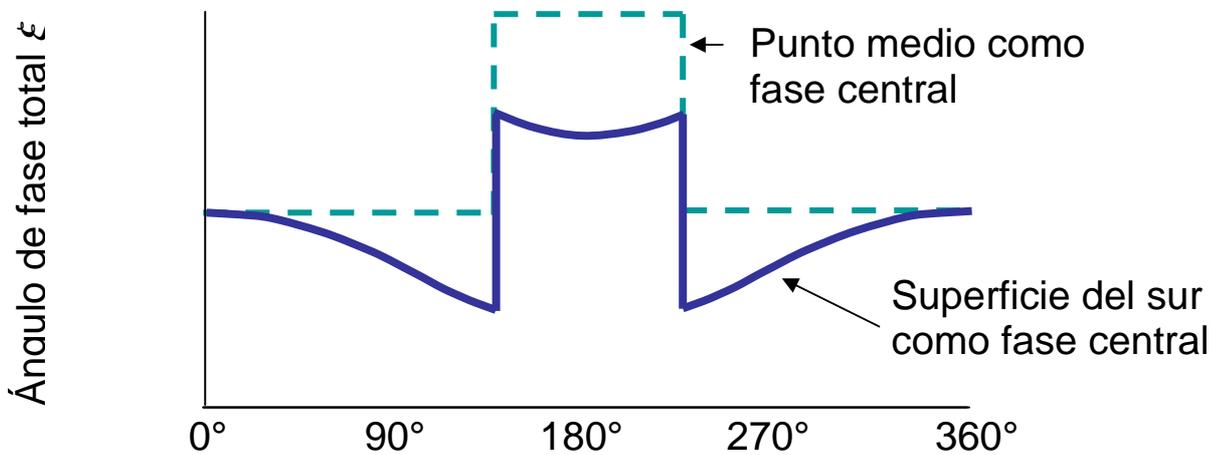
El patrón es ilustrado por la Fig. 5-13b. Por el principio de multiplicación de patrón, el patrón total del arreglo es el producto de este patrón y el patrón del arreglo primario, o

$$E = \cos(54 \cos \phi - 52^\circ) \cos(108^\circ \cos \phi + 90^\circ) \dots\dots\dots(7)$$

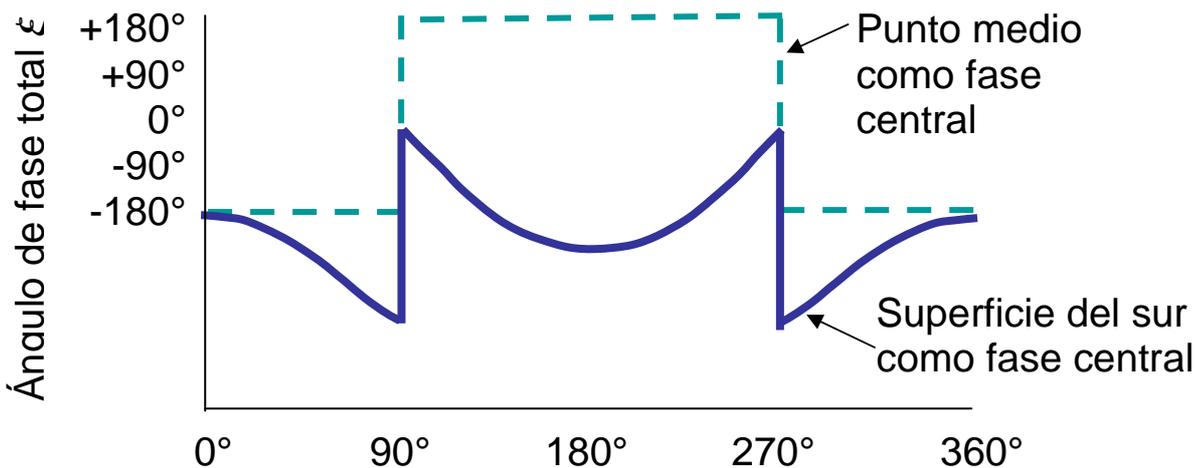
Este patrón, el cual es ilustrado por la Fig. 5-13c, satisface los requerimientos del patrón. El arreglo completo es obtenido por reemplazo de cada una de las fuentes isotrópicas del patrón secundario por el arreglo de dos fuentes que producen el patrón primario. El punto medio de cada arreglo primario es su centro de fase por eso este punto es localizado en la localización de una fuente secundaria. La antenna completa es entonces un arreglo lineal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas como es mostrado en la parte mas baja de la Fig. 5-13, donde ahora cada fuente representa una única torre vertical, todas las torres poseen la misma corriente. La corriente de la torre 2 adelanta a la de la torre 1 y la de la torre 4 adelanta a la de la torre 3 por  $104^\circ$ , mientras la corriente en las torres 1 y 3 y 2 y 4 están en oposición de fase. La fase relativa de la corriente es ilustrada por los vectores en la parte mas baja de la Fig. 5-13c.

La solución obtenida es solo una de un infinito número de posibles soluciones involucrando cuatro torres. Esto es, sin embargo, una solución práctica y satisfactoria al problema.

La variación de fase " $\xi$ " en torno de los arreglos primario, secundario y total es mostrado en la Fig. 5-14a, b, y c con el centro de fase al punto central de cada arreglo y también a la fuente ubicada al extremo sur. El ordenamiento de los arreglos con los centros de fase es ilustrado en la Fig.5-14d para ambos casos.



(a) Patrón Primario

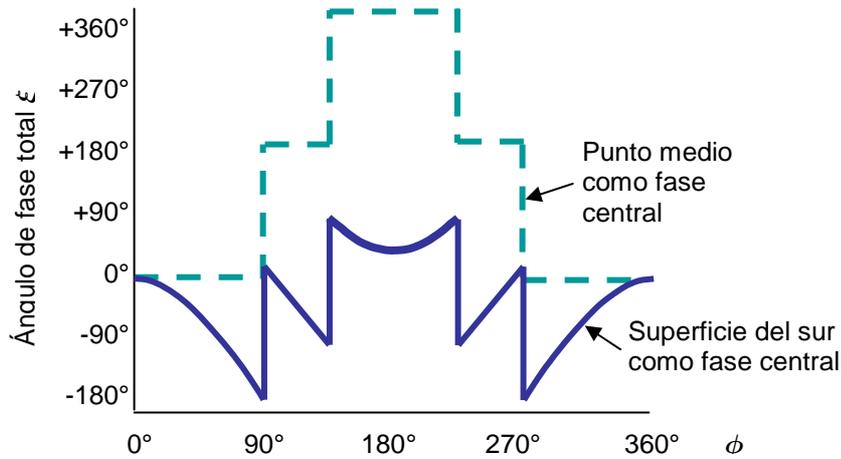


(b) Patrón Secundario

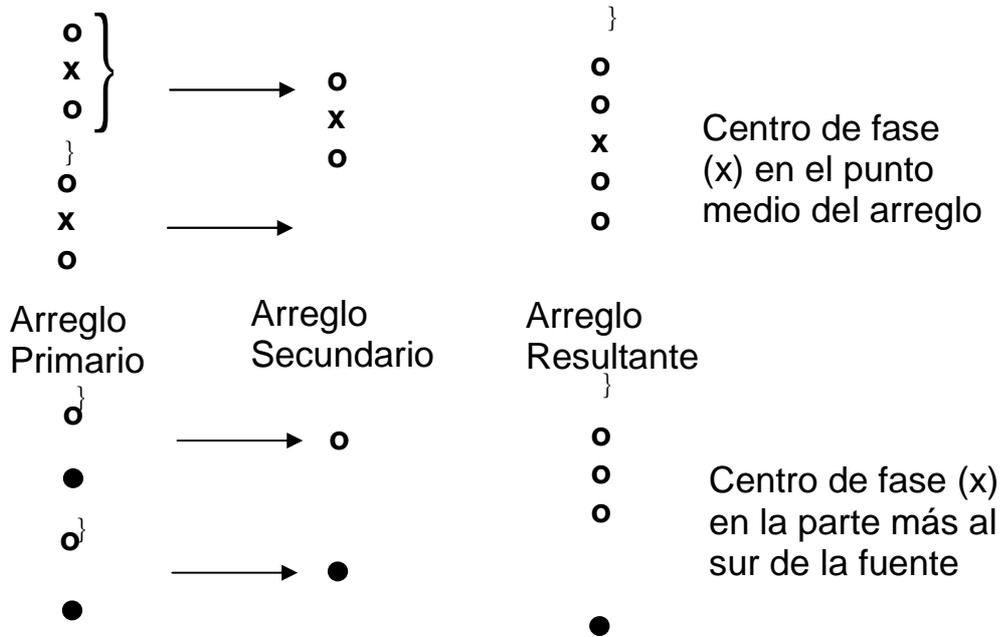
**Figura 5-14**

Patrones de fase de los arreglos primario, secundario y total tomando los patrones de campo mostrados en la Fig. 5-13. Los patrones de fase están dados por el centro de fase al punto medio del arreglo y

hacia la fuente situada al extremo sur, el ordenamiento de los arreglos y los centros de fase están mostrados en (d). El ángulo de fase " $\xi$ " es ajustado a cero con  $\varphi=0$  en todos los casos.



(c) Patrón Resultante



(d)

Figura 5-14 Continuada

**5-5 FUENTES PUNTUALES DIFERENTES Y NO ISOTRÓPICAS**

En la sección 5-3 fuentes puntuales no isotrópicas pero similares fueron discutidas, y fue mostrado que el principio de multiplicación de patrón podía ser aplicado. Sin embargo, si las fuentes no son similares, este principio no se aplica más y los campos de las fuentes deben ser añadidos a cada ángulo " $\varphi$ " por el cual el campo total es calculado. De esta manera, para dos fuentes no similares 1 y 2 situadas en el eje X con la fuente uno en el origen y las fuentes separadas por una distancia " $d$ " (de igual geometría como la Fig. 5-6) el campo total en general se expresa de la siguiente manera

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \sqrt{[f(\varphi) + aF(\varphi)\cos\psi]^2 + [aF(\varphi)\sin\psi]^2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\angle f(\varphi) + \arctan[aF(\varphi)\sin\psi / (f(\varphi) + aF(\varphi)\cos\psi)]$$

donde el campo total de la fuente 1 es tomado como

$$E_1 = E_0 f(\varphi) \angle f_p(\varphi) \dots\dots\dots(2)$$

y de la fuente 2 como

$$E_2 = aE_0 F(\varphi) \angle F_p(\varphi) + d_r \cos\varphi + \delta \dots\dots\dots(3)$$

donde

$E_0$ = constante

$a$ =proporción de la máxima amplitud de la fuente 2 a la fuente 1 ( $0 \leq a \leq 1$ )

$\psi = d_r \cos\varphi + \delta = f_p(\varphi) + F_p(\varphi)$ , donde

$\delta$  = fase relativa de la fuente 2 con respecto a la fuente 1

$f(\varphi)$ =campo patrón relativo de la fuente 1

$f_p(\varphi)$ =patrón de fase de la fuente 1

$F(\varphi)$ =patrón de campo relativo de la fuente 2

$F_p(\varphi)$ =patrón de fase de la fuente 2

En (1) el ángulo de fase ( $\angle$ ) es referido a la fase del campo de la fuente 1 en alguna dirección de referencia ( $\varphi = \varphi_0$ )

En el caso especial donde los patrones de campo son idénticos pero los patrones de fase no lo son,  $a=1$ , y

$$f(\varphi) = F(\varphi) \dots\dots\dots(4)$$

del cual

$$E = 2E_0 f(\varphi) \cos \frac{\psi}{2} \angle f_p(\varphi) + \psi/2 \dots\dots\dots(5)$$

donde la fase es de nuevo referida a la fuente 1 en alguna dirección de referencia  $\varphi_0$ .

Como una ilustración de fuentes puntuales no isotrópicas y no similares, consideremos un ejemplo en el cual el campo de la fuente 1 esta dado por

$$E_1 = \cos\varphi \angle 0 \dots\dots\dots(6)$$

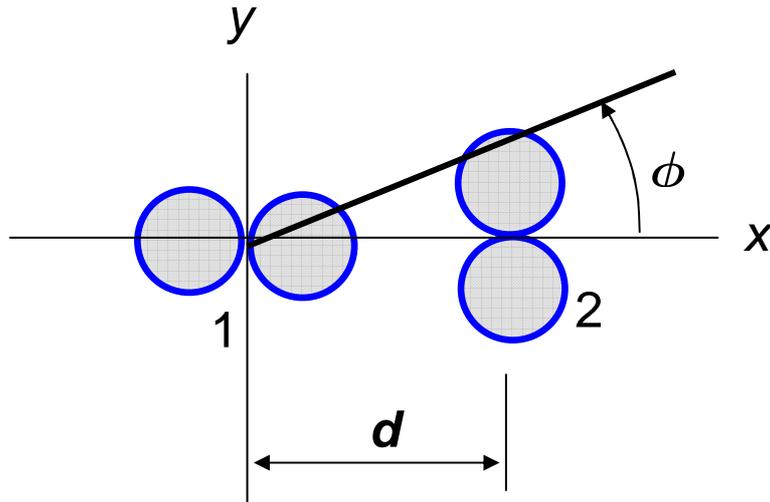
y de la fuente 2 por

$$E_2 = \sin\varphi \angle \psi \dots\dots\dots(7)$$

donde  $\psi = d_r \cos\varphi + \delta$

La relación de las dos fuentes para el plano coordinado y los patrones de campo individuales es mostrado en la Fig. 5-15. La fuente 1 esta localizada en el origen. El campo total  $E$  es entonces el vector suma de  $E_1$  y  $E_2$ , o

$$E = \cos\varphi + \sin\varphi \angle \psi \dots\dots\dots(8)$$



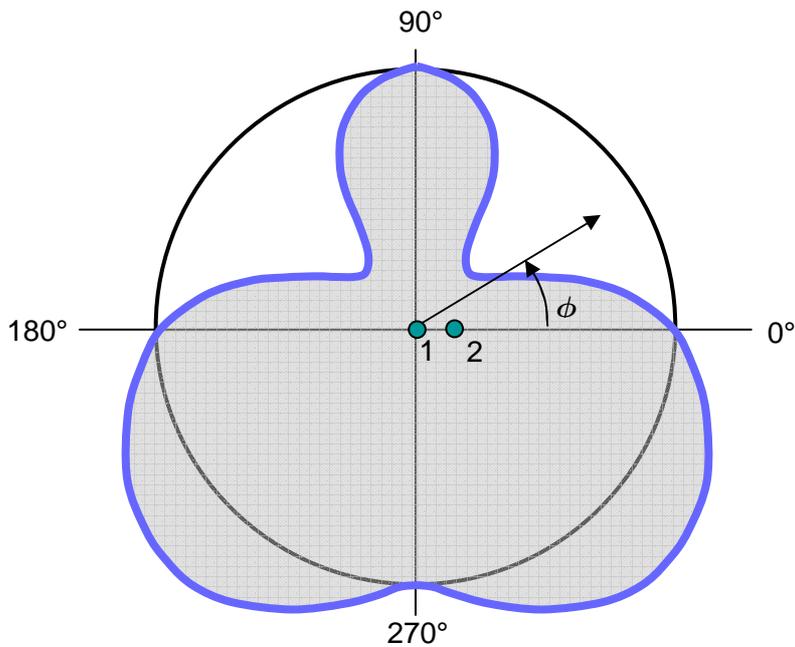
**Figura 5-15**

Relación de dos fuentes no isotrópicas no similares para un plano coordenado.

Consideremos el caso para un espaciamento de  $\lambda/4$  ( $d=\lambda/4$ ) y fase en cuadratura de las fuentes ( $\delta=\pi/2$ ). Entonces

$$\psi = \frac{\pi}{2}(\cos \varphi + 1) \dots\dots\dots(9)$$

El cálculo para este caso es fácilmente llevado a cabo por adición grafica de vectores. El patrón de campo resultante para el campo total E de un arreglo es presentado en la Fig. 5-16, y el patrón de fase resultante para un ángulo "xi" esta dado en la Fig. 5-17. El ángulo "xi" es el ángulo de fase entre el campo total y b el campo de la fuente 1 en la dirección  $\varphi=0$ .



**Figura 5-16**

Patrón de campo de un arreglo de dos fuentes no isotrópicas no similares de la Fig. 5-15 para  $d=\lambda/4$  y  $\delta=90^\circ$ .

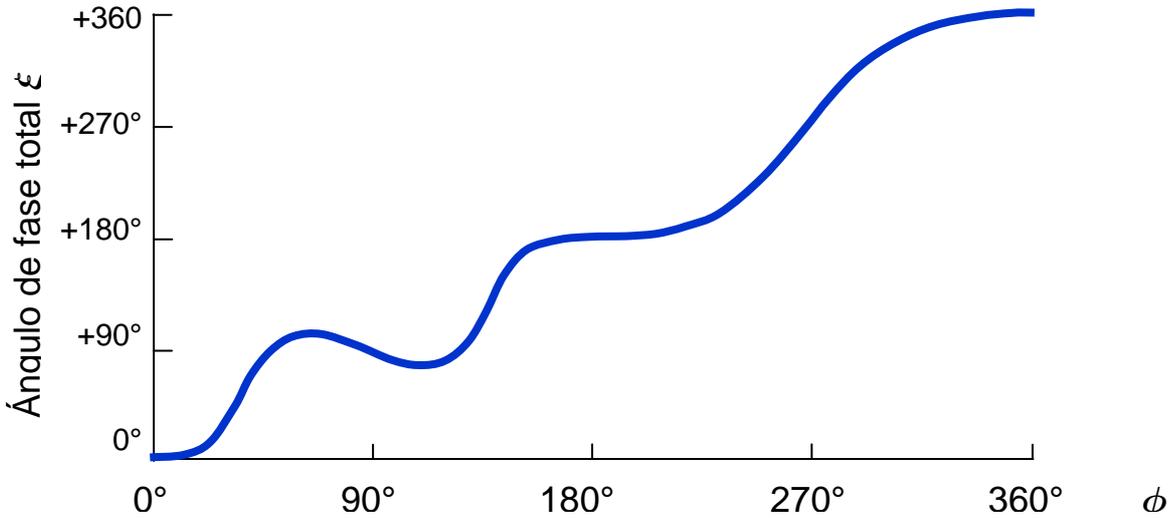


Figura 5-17

Patrón de fase de un arreglo que tiene el patrón de campo de la Fig. 5-16. El ángulo de fase "ξ" tiene a la fuente 1 como centro de fase.

**5-6 ARREGLOS LINEALES DE n FUENTES PUNTUALES ISOTRÓPICAS DE IGUAL AMPLITUD Y ESPACIAMIENTO**

**Introducción**

Ahora procederemos al caso de "n" fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y espaciamento ordenados en un arreglo lineal, como esta indicado en la Fig. 5-18, donde "n" es cualquier entero positivo. El campo total E a una distancia grande en la dirección "φ" esta dado por

$$E = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi} \dots\dots\dots(1)$$

donde "ψ" es la diferencia total de fase de los campos de fuentes adyacentes y esta dado por

$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \phi + \delta = d_r \cos \phi + \delta \dots\dots\dots(2)$$

donde "δ" es la diferencia de fase de las fuentes adyacentes, i.e., de la fuente 2 con respecto a 1, 3 con respecto a 2, etc. (Schelkunoff-1, Stratton-1).

Las amplitudes de los campos de las fuentes son todas iguales y tomadas como unidad. La fuente 1 (Fig. 5-18) es la fase de referencia. De esta manera, a un punto distante en la dirección "φ" el campo de la fuente 2 esta adelantado en fase con respecto a la fuente 1 por "ψ", el campo de la fuente 3 esta adelantado en fase con respecto a la fuente 1 por 2ψ, etc.

La ecuación (1) es una serie geométrica. Cada termino representa un fasor, y la amplitud del campo total E y su ángulo de fase "ξ" pueden ser obtenidos por adición de fasores (vectores) como en la Fig. 5-19. Analíticamente, E puede ser expresada en una forma trigonométrica simple la cual desarrollamos como sigue a continuación:

$$Ee^{j\xi} = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{jn\psi} \dots\dots\dots(3)$$

Ahora restamos (3) de (1) y dividimos por  $1 - e^{jn\psi}$ , cumpliéndose

$$E = \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} \dots\dots\dots(4)$$

La ecuación (4) puede ser rescrita como

$$E = \frac{e^{jn\psi/2} (e^{jn\psi/2} - e^{-jn\psi/2})}{e^{j\psi/2} (e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2})} \dots\dots\dots(5)$$

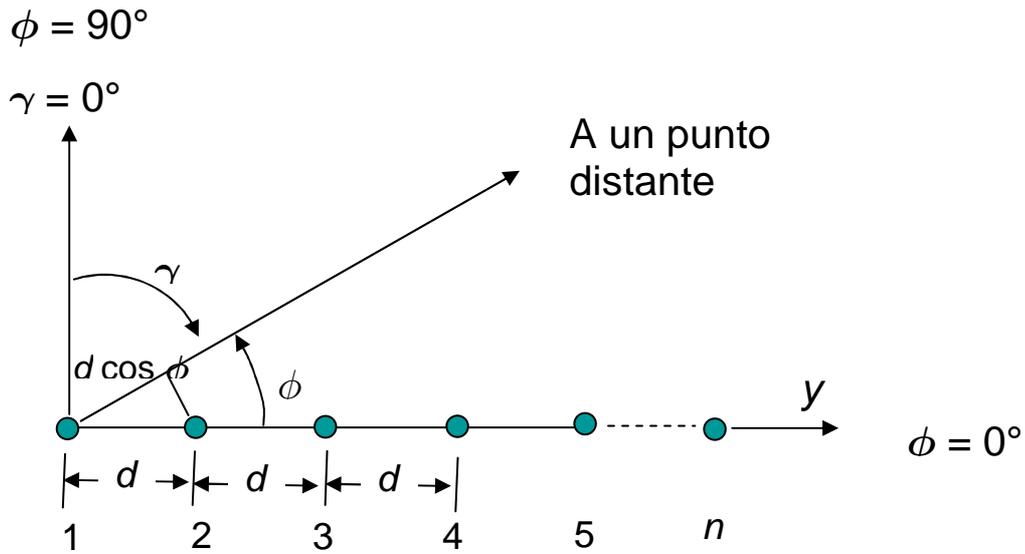


Figura 5-18

Ordenamiento de un arreglo lineal de "n" fuentes puntuales isotrópicas.

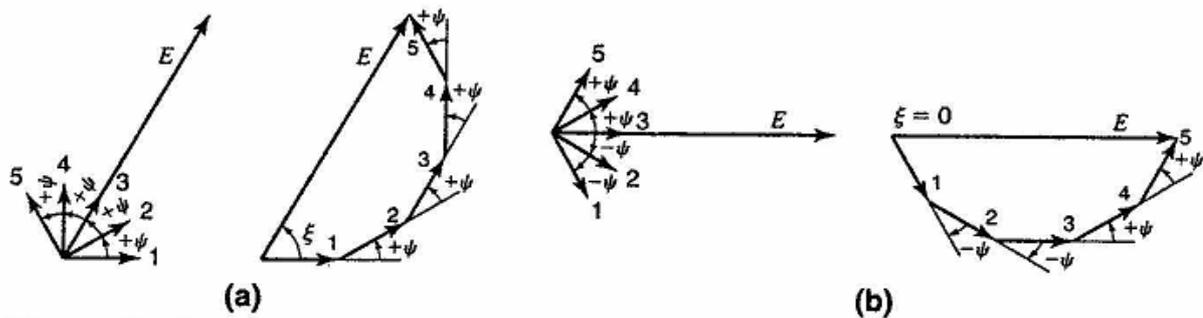


Figura 5-19

- (a) Vector adición de campos a una considerable distancia de un arreglo lineal de cinco fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud con la fuente 1 como centro de fase (fase de referencia).
- (b) Lo mismo, pero con el punto central del arreglo (fuente 3) como centro de fase. del cual

$$E = e^{j\xi} \frac{\text{sen}(n\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} = \frac{\text{sen}(n\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \angle \xi \dots\dots\dots(6)$$

donde "xi" es referido al campo de la fuente 1. El valor de "xi" esta dado por

$$\xi = \frac{n-1}{2}\psi \dots\dots\dots(7)$$

Si la fase es referida al punto central del arreglo, (6) se convierte en

$$E = \frac{\text{sen}(n\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \dots\dots\dots(8)$$

En este caso el patrón de fase es una función escalón según lo dado por la muestra de (8). La fase del campo es constante dondequiera E tenga un valor pero cambia de signo cuando E pasa por el cero.

Cuando  $\psi=0$  (6) o (8) es indeterminado por lo cual para este caso E debe ser obtenido como el límite de (8) cuando " $\psi$ " se aproxima a cero. De esta manera, para  $\psi=0$  tenemos la siguiente relación

$$E = n \dots\dots\dots(8a)$$

Este es el máximo valor que E puede alcanzar. Por lo tanto, el valor normalizado para el campo total para  $E_{\text{max}}=n$  es

$$E = \frac{1 \text{ sen}(n\psi/2)}{n \text{ sen}(\psi/2)} \dots\dots\dots(9)$$

El campo como muestra la ecuación (9) será referido como el "factor de arreglo". Los valores del factor del arreglo como son obtenidos de la ecuación (9) para varios números de fuentes son presentados en la Fig. 5-20. Si es que " $\psi$ " es conocido como una función de " $\phi$ ", entonces el patrón de campo puede ser obtenido directamente de la Fig. 5-20.

Podemos concluir de la anterior discusión que el campo del arreglo será un máximo en cualquier dirección " $\phi$ " para  $\psi=0$ . En casos especiales,  $\psi$  puede que no sea cero para cualquier valor de " $\phi$ ", y en este caso el campo es usualmente un máximo al valor mínimo de " $\psi$ ".

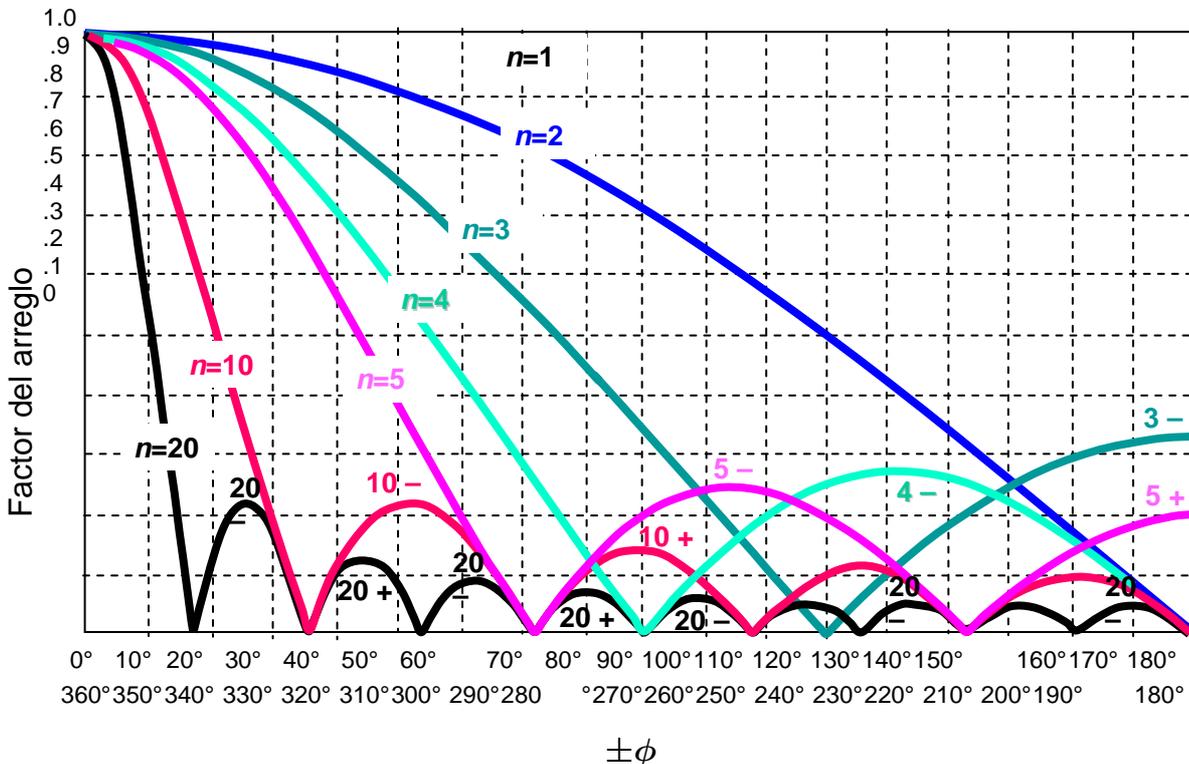


Figura 5-20

Carta de Patrón de campo universal para arreglos de varios números de "n" fuentes puntuales isotrópicas de igual magnitud y espaciamento.

Para ilustrar algunas de las propiedades de arreglos lineales (9) desde ahora será aplicado para varios casos especiales. Ver programas en el Web Site del libro que involucran estos diferentes casos. Ver también la discusión en el Apéndice C.

**Caso 1. Arreglos de radiación transversal (Fuentes en Fase)**

El primer caso es un arreglo lineal de "n" fuentes isotrópicas de la misma amplitud y fase. En consecuencia,  $\delta=0$  y

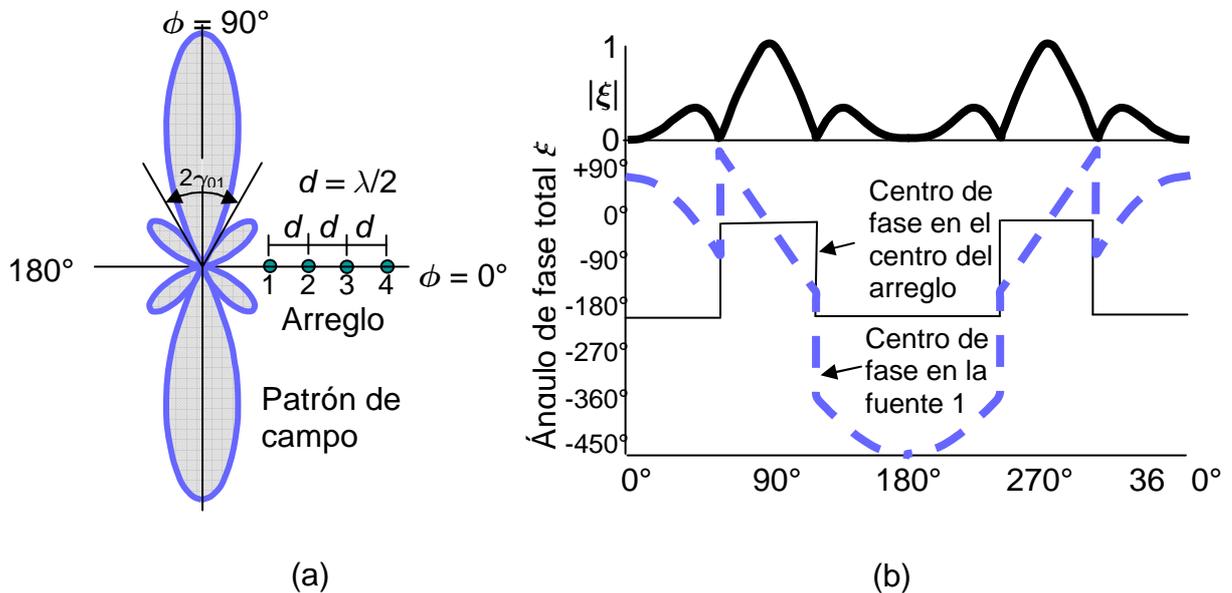
$$\psi = d_r \cos \phi \dots\dots\dots(10)$$

Para hacer  $\psi=0$  se requiere que  $\phi=(2k+1)(\pi/2)$ , donde  $k=0,1,2,3,\dots$ . El campo es, por consiguiente, un máximo cuando

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{3\pi}{2} \dots\dots\dots(10a)$$

Esto es, el campo máximo esta en la dirección normal al arreglo. Por lo tanto, esta condición, la cual es caracterizada por fuentes en fase ( $\delta=0$ ), resulta en un tipo de arreglo transversal.

Como un ejemplo, el patrón de un arreglo transversal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas en fase de igual amplitud es mostrada en la Fig. 5-21a. El espaciamento entre fuentes es  $\lambda/2$ . El patrón de campo en coordenadas rectangulares y los patrones de fase 1 y los patrones de fase para este arreglo son representados en la Fig.5-21b.



**Figura 5-21**

- (a) Patrón de campo de un arreglo de radiación transversal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud y fase. El espaciamento entre fuentes es  $\lambda/2$ .
- (b) El patrón de campo en coordenadas rectangulares y patrones de fase del mismo arreglo con centro de fase en el punto central de la fuente 1. La dirección de referencia para la fase esta a  $\phi=90^\circ$ .

**Caso 2. Arreglo ordinario longitudinal (End Fire)**

Ahora busquemos el ángulo de fase entre fuentes adyacentes que esta requerida para hacer el campo tenga un máximo en la dirección del arreglo ( $\varphi=0$ ). Un arreglo de este tipo puede ser llamado un arreglo longitudinal. Para esto sustituimos las condiciones de  $\psi=0$  y  $\varphi=0$  en (2), del cual

$$\delta = -d_r \dots\dots\dots(11)$$

Por lo tanto, para un arreglo longitudinal, la fase entre fuentes esta retardada progresivamente por la misma cantidad como el espaciamento entre fuentes expresado en radianes. De esa manera, si el espaciamento es  $\lambda/4$ , la fuente 2 en la Fig. 5-18 debe estar en atraso respecto a la fuente 2 por  $90^\circ$ , etc.

Como un ejemplo, el patrón de campo de un arreglo longitudinal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas es presentado en la Fig. 5-22a. El espaciamento entre fuentes es  $\lambda/2$  y  $\delta=-\pi$ . El patrón de campo en coordenadas rectangulares y los patrones de fase son mostrados en la Fig. 5-22b. La misma forma de patrón de campo es obtenida en este caso si  $\delta=+\pi$  dado que, con  $d=\lambda/2$ , el patrón es bidireccional. Sin embargo, si el espaciamento es menor que  $\lambda/2$  la radiación máxima esta en la dirección  $\varphi=0^\circ$  cuando  $\delta=-d_r$  y en la dirección  $\varphi=180^\circ$  cuando  $\delta=+d_r$ .

**Caso 3. Arreglo de radiación longitudinal con directividad incrementada**

La situación discutida en el Caso 2, particularmente, para  $\delta=-d_r$ , produce un campo máximo en la dirección  $\varphi=0$  pero no proporciona máxima directividad. Esto ha sido mostrado por Hansen (1) y Woodyard que una directividad mas grande es obtenida por incremento del cambio de fase entre fuentes que

$$\delta = -\left(d_r + \frac{\pi}{n}\right) \dots\dots\dots(12)$$

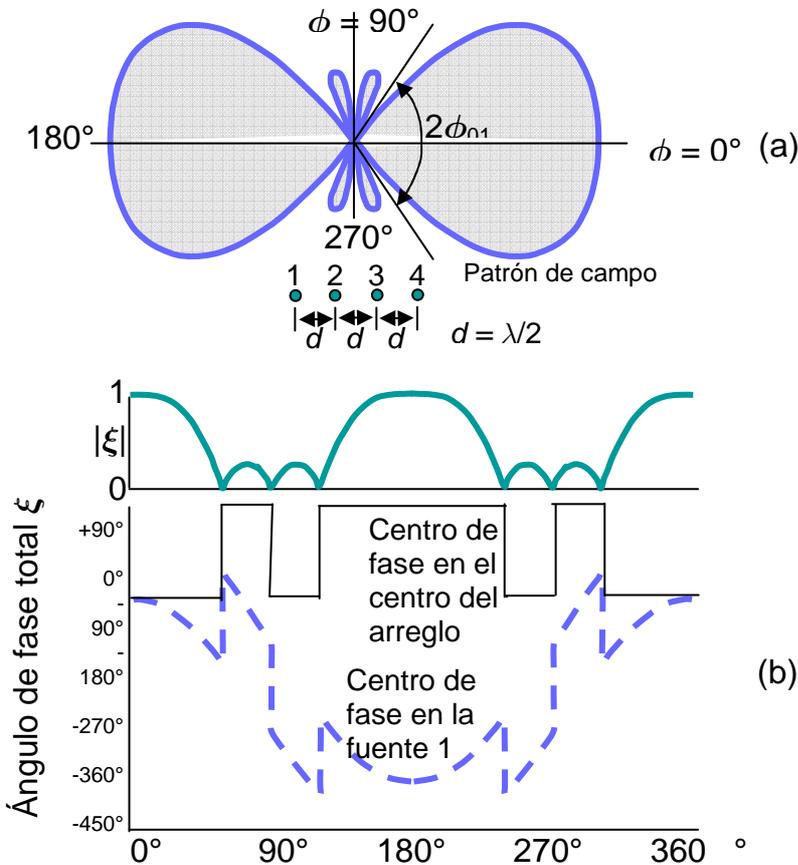


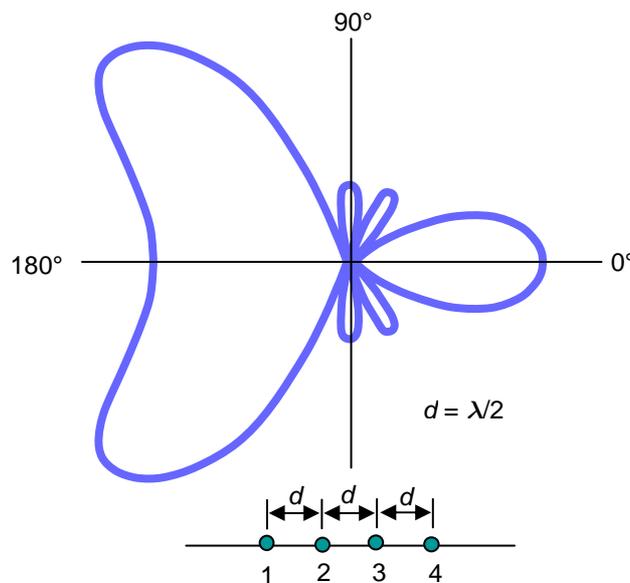
Figura 5-22

- (a) Patrón de campo de un arreglo longitudinal ordinario de cuatro fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud. separación  $\lambda/2$  y el ángulo de fase es  $\delta=-\pi$ .
- (b) Patrón de campo en coordenadas rectangulares y patrones de fase del mismo arreglo con centro de fase al punto medio y en la fuente 1. La dirección de referencia para la fase esta en  $\varphi=0^\circ$ .

Esta condición será referida como la condición para el "incremento de directividad". De esa manera para la diferencia de fase de los campos a una gran distancia tenemos

$$\psi = d_r(\cos \varphi - 1) - \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots(13)$$

Con un ejemplo, el patrón de campo de un arreglo de radiación longitudinal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas para este caso es ilustrado en la Fig. 5-23. El espaciamento entre fuentes es  $\lambda/2$ , y por lo tanto  $\delta=-(5\pi/4)$ . Por consiguiente, las condiciones son las mismas para como para el arreglo con el patrón de la Fig. 5-22, excepto que la diferencia de fase entre fuentes esta incrementada por  $\pi/4$ . Comparando los patrones de campo de las Figs. 5-22a y 5-23, es aparente que la diferencia de fase adicional produce un lóbulo principal considerablemente agudo en la dirección  $\varphi=0$ . Sin embargo, la espalda de los lóbulos en este caso es excesivamente grande debido a que el gran valor de espaciamento da lugar a una gama demasiado grande en " $\psi$ ".



**Figura 5-23**

Patrón de campo de un arreglo longitudinal ordinario de cuatro fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud separadas  $\lambda/2$ . El desfase es adaptado por directividad incrementada ( $\delta=-5\pi/4$ ).

Para realizar el incremento ofrecido de directividad por la diferencia adicional de fase se requiere que  $|\varphi|$  sea restringido en su rango a un valor de  $\pi/n$  para  $\varphi=0$  y un valor en la vecindad de  $\pi$  para  $\varphi=180^\circ$ . Esto puede ser realizado si el espacio es reducido. Por ejemplo, el patrón de campo de un arreglo de 10 fuentes isotrópicas puntuales de igual amplitud y espaciadas  $\lambda/4$  es presentado aparte en la Fig. 5-24a para la condición de fase produciendo una directividad incrementada ( $\delta=-0.6\pi$ ). En contraste con este patrón, el primero es presentado en la Fig. 5-24b para la antenna idéntica con la fase de un arreglo ordinario de radiación longitudinal ( $\delta=-0.5\pi$ ). Ambos patrones son para el mismo máximo. La directividad incrementada es en apariencia de la mayor agudeza del patrón. Integrandolo el patrón, incluidos los lóbulos menores, la directividad es encontrada resulta un valor alrededor de 19 y la del arreglo ordinario longitudinal cerca de 11. Los anchos de haz y las directividades para los dos casos son comparados en la tabla 5-1.

El patrón de máximo campo de la Fig. 5-24a ocurre a un ángulo de  $\varphi=0$  y  $\psi=-\pi/n$ . En general, cualquier incremento de directividad de un arreglo longitudinal, con un máximo en  $\psi=-\pi/n$ , tiene un patrón de campo normalizado dado por

$$E = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{\text{sen}(n\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \dots\dots\dots(14)$$

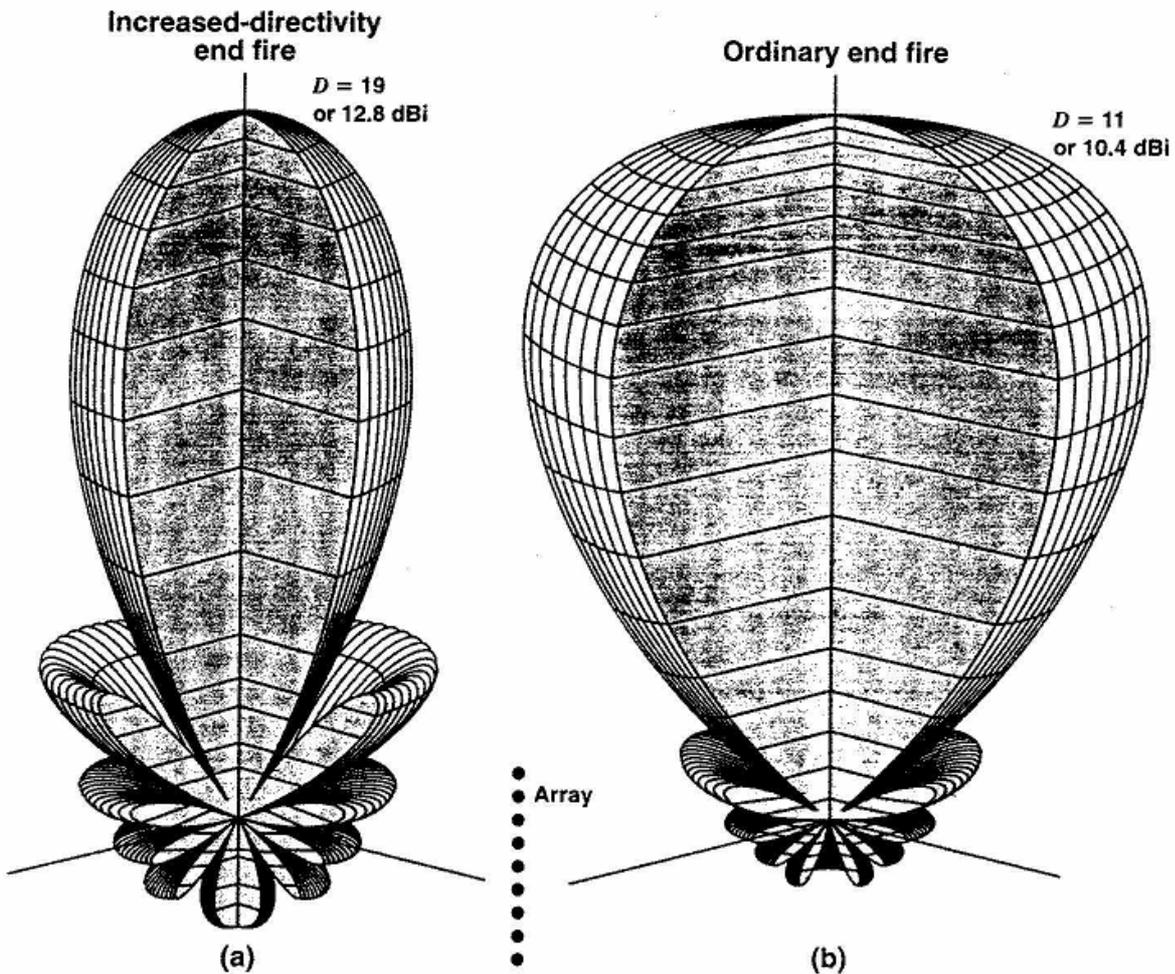
**Caso 4. Arreglo con máximo campo en una dirección arbitraria.**

Consideremos el caso de un arreglo con patrón de campo que tiene un máximo en alguna dirección arbitraria  $\varphi_1$  que es diferente de  $k\pi/2$  donde  $k=0, 1, 2,$  o  $3$ . Entonces (2) se convierte en

$$0 = d_r \cos \varphi_1 + \delta \dots\dots\dots(15)$$

Al especificar el espaciamento  $d_r$ , la diferencia de fase requerida es entonces determinada por (15). Inversamente, al cambiar "δ" la dirección de haz  $\varphi_1$  puede ser desplazada o escaneada.

**Desplazamiento de fase 180° (0.6 π) versus 90° (0.5 π)**

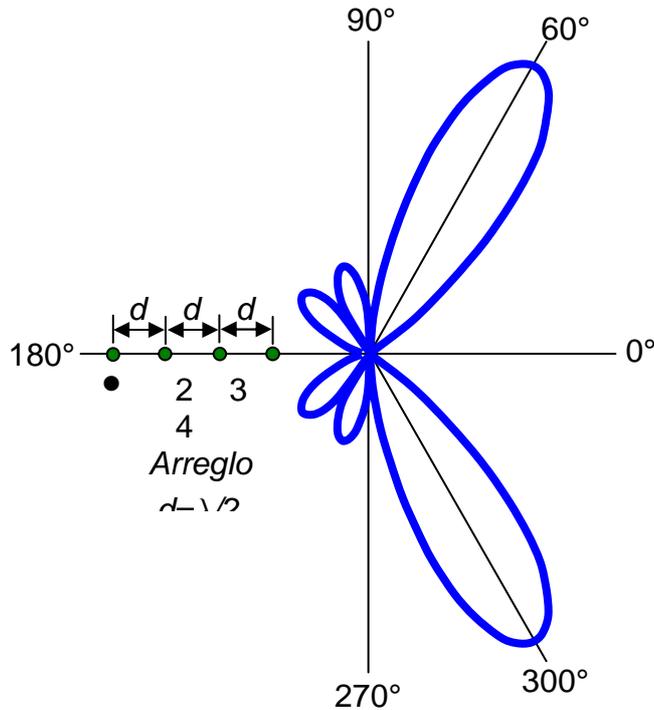


**Figura 5-24**

Patrones de campo de arreglos de radiación longitudinal de 10 fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud espaciadas  $\lambda/4$  una de la otra. El patrón en (a) tiene la fase adaptada para la directividad incrementada ( $\delta=-0.6\pi$ ), mientras el patrón en (b) tiene la fase de un arreglo de radiación ordinario longitudinal ( $\delta=-0.5\pi$ ).

**Tabla 5-1** Comparación de arreglos longitudinales

	Arreglo ordinario longitudinal	Arreglo longitudinal con directividad incrementada
Ancho de haz entre puntos de media potencia	69°	38°
Ancho de haz entre los primeros nulos	106°	74°
Directividad	11	19



**Figura 5-25**

Patrón de campo de un arreglo de cuatro fuentes puntuales de igual amplitud con desfase adaptado para proporcionar el máximo en  $\phi=60^\circ$ . El espaciamiento es  $\lambda/2$ .

Como un ejemplo, supongamos que  $n=4$ ,  $d=\lambda/2$ , y que deseamos tener un campo máximo en la dirección de  $\phi=60^\circ$ . Entonces  $\delta=-\pi/2$ , cumpliéndose el patrón mostrado en la Fig. 5-25.

**5-7 DIRECCIONES DE NULOS PARA ARREGLOS DE n FUENTES PUNTUALES ISOTRÓPICAS DE IGUAL AMPLITUD Y ESPACIAMIENTO**

En esta sección serán discutidos métodos simples para encontrar las direcciones de los patrones nulos de los arreglos considerados en la SEC. 5-6. Continuando con el procedimiento dado por Schelkunoff (2,3) las direcciones de los nulos para un arreglo de n fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y espaciamiento ocurre cuando  $E=0$  o, provisto que el denominador de la EC. (5-6-4) no sea cero, cuando

$$e^{jn\psi} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

La ecuación (1) requiere que

$$n\psi = \pm 2K\pi \dots\dots\dots(2)$$

donde  $K=1, 2, 3, \dots$

Comparando el valor de " $\psi$ " en (2) a su valor en la EC. (5-6-2) obtenemos

$$\psi = d_r \cos \varphi_0 + \delta = \pm \frac{2K\pi}{n} \dots\dots\dots(3)$$

De esa manera,

$$\varphi_0 = \arccos \left[ \left( \pm \frac{2K\pi}{n} - \delta \right) \frac{1}{d_r} \right] \dots\dots\dots(4)$$

donde  $\varphi_0$  proporciona la dirección de los patrones nulos. Notar que los valores de K deben ser excluidos para los cuales  $K=mn$ , donde  $m=1,2,3,\dots$ . De esta manera, si  $K=mn$ , (2) se reduce a  $\psi=\pm 2m\pi$  y el denominador de la EC. (5-6-4) igual a cero de modo que la condición de nulidad de (1), de que el numerador de la ecuación (5-6-4), es insuficiente.

En un arreglo de radiación transversal  $\delta=0$ , de modo que para este caso (4) se llega a obtener

$$\varphi_0 = \arccos \left( \pm \frac{2K\pi}{nd_r} \right) = \arccos \left( \pm \frac{K\lambda}{nd} \right) \dots\dots\dots(5)$$

Como un ejemplo, el patrón de campo de la Fig. 5-21 ( $n=4$ ,  $d=\lambda/2$ ,  $\delta=0$ ) tiene las direcciones de nulos

$$\varphi_0 = \arccos \left( \pm \frac{K}{2} \right) \dots\dots\dots(6)$$

Para  $K=1$ ,  $\varphi_0=\pm 60^\circ$  y  $\pm 120^\circ$ , y para  $K=2$ ,  $\varphi_0=0^\circ$  y  $180^\circ$ . Estas son las seis direcciones de los nulos para este arreglo.

Si  $\varphi_0$  en (3) es reemplazado por su ángulo complementario  $\gamma_0$  (ver Fig. 5-18), entonces (5) se convierte en

$$\gamma_0 = \arcsen \left( \pm \frac{K\lambda}{nd} \right) \dots\dots\dots(7)$$

Si el arreglo es grande, a fin de que  $nd \gg K\lambda$ ,

$$\gamma_0 \approx \pm \frac{K\lambda}{nd} \dots\dots\dots(8)$$

Los primeros nulos a ambos lados del máximo que ocurre para  $K=1$ . Estos ángulos serán designados  $\gamma_{01}$ . De ese modo,

$$\gamma_{01} \approx \pm \frac{\lambda}{nd} \dots\dots\dots(9)$$

y el total ancho de haz del lóbulo principal entre los primeros nulos para un arreglo transversa grande es entonces

$$2\gamma_{01} \approx \frac{2\lambda}{nd} \dots\dots\dots(10)$$

Para el patrón de campo de la Fig. 5-21 este ancho es exactamente  $60^\circ$ , tal como esta dado por (10) esto es 1 rad, o  $57.3^\circ$ . Este patrón es para un arreglo  $2\lambda$  de longitud. El resultado seria mejor con arreglos más grandes.

Volviendo a los arreglos de radiación longitudinal, la condición para un arreglo de radiación longitudinal ordinario es que  $\delta = -d_r$ . De esa manera, para este caso (3) se convierte en

$$\cos \varphi_0 - 1 = \pm \frac{2K\pi}{nd_r} \dots\dots\dots(11)$$

por el cual obtenemos

$$\frac{\varphi_0}{2} = \arcsen\left(\pm \sqrt{\frac{K\pi}{nd_r}}\right) \dots\dots\dots(12)$$

o

$$\varphi_0 = 2\arcsen\left(\pm \sqrt{\frac{K\lambda}{2nd}}\right) \dots\dots\dots(13)$$

Como un ejemplo el patrón de campo de la Fig. 5-22 ( $n=4$ ,  $d=\lambda/2$ ,  $\delta=-\pi$ ) tiene las direcciones de los nulos

$$\varphi_0 = 2\arcsen\left(\pm \sqrt{\frac{K}{4}}\right) \dots\dots\dots(14)$$

Para  $K=1$ ,  $\varphi_0 = \pm 60^\circ$ ; para  $K=2$ ,  $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ , etc.

Si el arreglo es grande, de modo que  $nd \gg K\lambda$ , (13) se convierte en

$$\varphi_0 \approx \pm \sqrt{\frac{2K\lambda}{nd}} \dots\dots\dots(15)$$

Los primeros nulos a ambos lados del máximo que ocurre para  $K=1$ . Estos ángulos serán designados  $\varphi_{01}$ . De ese modo,

$$\varphi_{01} \approx \pm \sqrt{\frac{2\lambda}{nd}} \dots\dots\dots(16)$$

Y el total ancho de haz del lóbulo principal entre los primeros nulos para un arreglo de radiación longitudinal ordinario es entonces

$$2\varphi_{01} \approx \pm 2\sqrt{\frac{2\lambda}{nd}} \dots\dots\dots(17)$$

Para el patrón de campo en la Fig. 5-22 este ancho es exactamente  $120^\circ$ , como esta dado por (17) esto es 2 radianes o  $115^\circ$ .

Para arreglos de radiación longitudinal con directividad incrementada tal como fue propuesto por Hansen (1) y Woodyard, la condición es que  $\delta = -(d_r + \pi/n)$ . De esa manera, para este caso (3) se convierte en

$$d_r(\cos \varphi_0 - 1) - \frac{\pi}{n} = \pm \frac{2K\pi}{n} \dots\dots\dots(18)$$

por el cual

$$\frac{\varphi_0}{2} = \arcsen \left[ \pm \sqrt{\frac{\pi}{2nd_r} (2K - 1)} \right] \dots\dots\dots(19)$$

o

$$\varphi_0 = 2\arcsen \left[ \pm \sqrt{\frac{\lambda}{4nd} (2K - 1)} \right] \dots\dots\dots(20)$$

Si el arreglo es grande, de modo que  $nd \gg K\lambda$ , (20) se convierte en

$$\varphi_0 \approx \pm \sqrt{\frac{\lambda}{nd} (2K - 1)} \dots\dots\dots(21)$$

Los primeros nulos a ambos lados del lóbulo principal,  $\varphi_0$ , ocurre para  $K=1$ . De esta manera,

$$\varphi_{01} \approx \pm \sqrt{\frac{\lambda}{nd}} \dots\dots\dots(22)$$

y el ancho de haz total del lóbulo principal entre nulos para un arreglo de radiación longitudinal grande con directividad incrementada es entonces

$$2\varphi_{01} \approx 2\sqrt{\frac{\lambda}{nd}} \dots\dots\dots(23)$$

Este ancho es  $1/\sqrt{2}$ , o 71 por ciento, del ancho del arreglo de radiación longitudinal ordinario. Como un ejemplo, el patrón del arreglo longitudinal ordinario de la Fig. 5-24b tiene un ancho de haz entre los primeros nulos de  $106^\circ$ . El ancho del patrón en la Fig. 5-24a para el arreglo con directividad incrementada es  $74^\circ$ , o 70 por ciento como máximo.

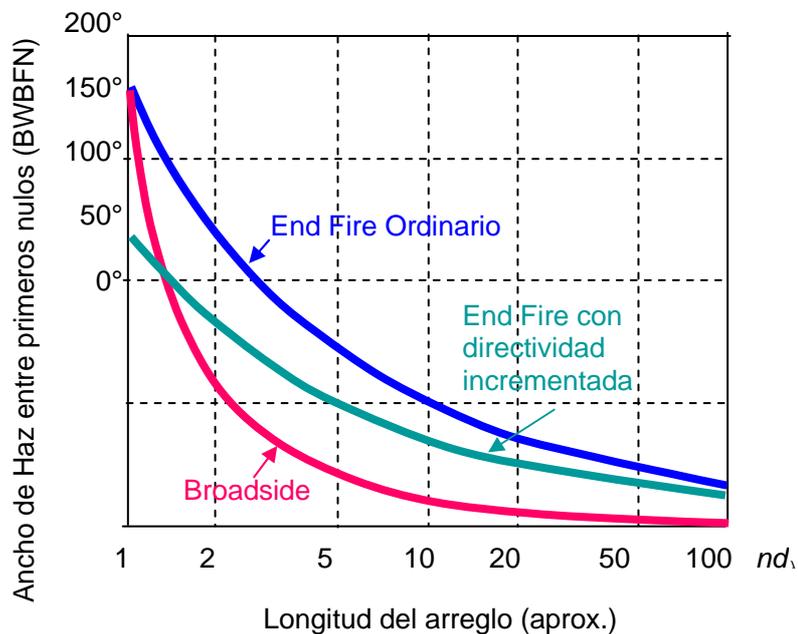
La tabla 5-2 muestra las formulas para las direcciones de los nulos y anchos de haz para los diferentes arreglos considerados anteriormente. Las direcciones de los nulos en la columna 2 se aplican a arreglos de cualquier extensión. Las formulas en la tercera y cuarta columnas son aproximadas y aplicadas solo a arreglos grandes.

**Tabla 5-2** Direcciones nulas y anchos de haz entre los primeros nulos para arreglos lineales de  $n$  fuentes isotropitas puntuales de igual amplitud y espaciamento. (Para  $n \geq 2$ . Los ángulos en la columna tres y cuatro son expresados en radianes. Para convertir a grados, multiplicar por 57.3)

Tipo de arreglo	Direcciones nulas (cualquier longitud de arreglo)	Direcciones nulas (arreglo grande)	Ancho de haz entre los primeros nulos (arreglo grande)
Caso general	$\varphi_0 = \arccos \left[ \left( \frac{\pm 2K\pi - \delta}{n} \right) \frac{1}{d_r} \right]$		
Transversal	$\gamma_0 = \arcsen \left( \pm \frac{K\lambda}{nd} \right)$	$\gamma_0 \approx \pm \frac{K\lambda}{nd}$	$2\gamma_{01} \approx \frac{2\lambda}{nd}$
Longitudinal ordinario	$\varphi_0 = 2\arcsen \left( \pm \sqrt{\frac{K\lambda}{2nd}} \right)$	$\varphi_0 \approx \pm \sqrt{\frac{2K\lambda}{nd}}$	$2\varphi_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2\lambda}{nd}}$
Longitudinal con directividad incrementada	$\varphi_0 = 2\arcsen \left[ \pm \sqrt{\frac{\lambda}{4nd} (2K - 1)} \right]$	$\varphi_0 \approx \pm \sqrt{\frac{\lambda}{nd} (2K - 1)}$	$2\varphi_{01} \approx 2\sqrt{\frac{\lambda}{nd}}$

Las formulas en la Tabla 5-2 han sido usadas para calcular las curvas presentadas en la Fig. 5-26. Esas curvas muestran el ancho de haz entre los primeros nulos como una función de  $nd_\lambda$  para tres tipos de arreglos: transversal, longitudinal ordinario, longitudinal con directividad incrementada. La cantidad  $nd_\lambda$  ( $=nd/\lambda$ ) es aproximadamente igual a la longitud de un arreglo en longitudes de onda para arreglos grandes. El valor exacto de la longitud del arreglo es  $(n-1)d_\lambda$ .

El ancho de haz de arreglos de radiación transversal largos es inversamente proporcional a la longitud del arreglo, en tanto que el ancho de haz arreglos de tipo longitudinal largos es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del arreglo. Por lo tanto, el ancho de haz en el plano de arreglo de radiación transversal largo es mucho mas pequeño que para arreglos del tipo longitudinal de la misma longitud es mostrado en la Fig. 5-26. Debe ser notado, sin embargo, que el arreglo de radiación transversal tiene un patrón de disco formado con un ancho de haz estrecho en un plano a través del eje del arreglo pero un patrón circular ( $360^\circ$  de ancho de haz) en el plano normal al eje del arreglo. Por otro lado, El arreglo de radiación longitudinal tiene un patrón e forma de cigarro con el mismo ancho de haz en todos los planos a través del eje del arreglo.



**Figura 5-26**

Ancho de haz entre los primeros nulos como una función de " $nd_\lambda$ " para arreglos de " $n$ " fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud. Para arreglos grandes, " $nd_\lambda$ " es aproximadamente igual a la longitud del arreglo.